Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XII, n.º 1 (1988), págs. 69-81

EXISTENCIA DE EQUILIBRIO EN UNA ECONOMIA CON PRODUCCION E INFINITAS MERCANCIAS

Manuel BESADA, Margarita ESTEVEZ, Carlos HERVES
Universidad de Santiago de Compostela

En este artículo se establece la existencia de equilibrio en una economía con producción en la que un número finito de agentes actúan sobre una lista infinita de mercancías. Partiendo del planteamiento clásico, el modelo se adapta, en particular, al caso en el que la actividad económica se desarrolla sin horizonte temporal, generalizando los resultados de Peleg y Yaari al permitir a los agentes el acceso a una producción conjunta.

1. Introducción

El problema de la existencia de equilibrio en una economía con un espacio de mercancías de dimensión infinita ha sido estudiado por diversos autores, generalizando los trabajos de Arrow-Debreu (1954), Negishi (1960) y Debreu-Scarf (1963).

Así, Florenzano (1983), demuestra un análogo infinito-dimensional del lema Gale-Nikaido-Debreu, para espacios de Banach con predual, lo que le permite obtener el equilibrio en tales espacios de mercancías a través de una prueba paralela a la que hacen Arrow-Debreu para el caso finito-dimensional. En la misma línea se sitúa también el trabajo de Toussaint (1984).

En el trabajo de Bewley (1972) (referencia fundamental en esta línea de investigación) se demuestra la existencia de equilibrio en $L_\infty(M, \mathscr{M}, \mu)$ (espacio de las funciones con valores reales medibles y esencialmente acotadas en $(M, \mathscr{M}, \mu)$, en donde M es la lista de las mercancías, $\mathscr{M}$ es una σ-álgebra sobre M y μ es una medida definida en $\mathscr{M}$) tomando el límite de una red de equilibrios en subeconomías con espacios de mercancías de dimensión finita. Araujo (1985) particulariza, al caso de una lista numerable de mercancías (l_∞), el trabajo de Bewley para economías de intercambio y prueba que en cualquier caso la topología del espacio ha de ser menos fina que la de Mackey. Más recientemente Mas-Colell (1986) demuestra la existencia de equilibrio en retículos de Banach, utilizando un argumento de Negishi e introduciendo en las preferencias la condición de ser uniformemente propias.

El método de Debreu-Scarf ha sido generalizado por Peleg y Yaari (1970). Su modelo se sale parcialmente de la estructura formal propuesta por Debreu (1973) ya que los precios, al no ser necesariamente elementos del espacio dual del espacio de las mercancías, no proporcionan valor finito a todas las asignaciones del espacio de las mercancías, pero sí a las admisibles. Sin embargo, el modelo permite muchas posibilidades pues, por ejemplo, el espacio de las mercancías no tiene ninguna restricción y, además, las hipótesis sobre las preferencias y los recursos iniciales son las mismas que las del caso finito dimensional.

En este artículo generalizamos el resultado de Peleg y Yaari (1970) al permitir a los agentes el acceso a planes de producción pertenecientes a un conjunto Y. Consideramos el modelo de economía utilizado por Peleg y Yaari en el que añadimos las hipótesis correspondientes al conjunto de producción Y. Demostramos la existencia de equilibrio modificando convenientemente el procedimiento de los referidos autores. El resultado de existencia así obtenido puede compararse con el de Bewley, pues al considerar una lista numerable, el modelo de Bewley tiene como espacio de las mercancías a l_∞, conjunto de las sucesiones acotadas de números reales, que está contenido en el conjunto de todas las sucesiones de números reales y que denotamos por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si bien en Bewley (1972) se permiten más relaciones de preferencias continuas que en nuestro caso, la hipótesis de adecuación utilizada por Bewley se ve aquí debilitada siendo además, en este caso, el espacio de las mercancías más amplio.

2. El modelo

El espacio de las mercancías que será utilizado es este modelo, será el espacio de todas las sucesiones de números reales, esto es, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, ..., x_k, ...) : x_k \in \mathbb{R}\}$. En este espacio se consideran diversas estructuras que describimos brevemente:

1. Estructura algebraica. Si $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la adición se define por $x + y = z$, si y sólo si, $z_k = x_k + y_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, y si $a \in \mathbb{R}$ el producto por un escalar $z = ax$, si y sólo si, $z_k = ax_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

2. Estructura topológica. En $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ consideraremos la topología producto; esto es, la topología de la convergencia puntual. Si $\{x^n\}$ es una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = x$, si y sólo si, para cada coordenada $k = 1, 2, ..., \lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k$. Los abiertos que definen esta topología son de la forma $G = U \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}\setminus\{1, 2, ..., n\}}$, donde U es un abierto del espacio $\mathbb{R}^n$ y n representa cualquier número natural.

   El dual topológico de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, es decir, el espacio de todas las aplicaciones lineales y continuas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$, está formado por el conjunto de todas las sucesiones de números reales con todas las coordenadas nulas excepto un número finito de ellas y se denota por $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, esto es $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})' = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

3. Estructura de orden. La relación de orden $\geqslant$, se define como sigue: $x \geqslant y$, si y sólo si, $x_k \geqslant y_k$, para cada $k = 1, 2, ...$ Si $x \geqslant y$, pero $x \neq y$, entonces escribiremos $x > y$.

Consideramos una economía, que denotamos por E, en la que intervienen m agentes. Un plan de acción será un elemento de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De este modo estamos considerando que la actividad económica se desarrolla en fechas que se suceden consecutivamente sin horizonte temporal. La lista de las mercancías se identifica con el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales de forma que, por ejemplo, los n_1 primeros naturales corresponden a las distintas mercancías fechadas en un primer período de tiempo, las n_2 siguientes corresponden a las mercancías fechadas en un segundo período, y así sucesivamente, de forma que un determinado bien o servicio situado en dos períodos distintos de tiempo es considerado como dos mercancías distintas. Un plan de acción, un elemento del espacio de las mercancías $x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, especifica la cantidad x_k de la mercancía k-ésima, para cada $k = 1, 2, ...$, que determinado agente hace disponible o tiene a su disposición y es confeccionado en el momento presente para todo el futuro. El agente i, $i = 1, ..., m$, dispone de unos recursos iniciales $\omega_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+ = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_k \geqslant 0$, para todo $k = 1, 2, ...\}$ y tiene establecida una relación de preferencia $\succsim_i$, definida en el conjunto de consumos posibles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+$, que se supone reflexiva, transitiva y completa. Para cada $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+$ escribimos $x \sim_i y$ si $x \succsim_i y$ e $y \succsim_i x$, también $x \succ_i y$ si $x \succsim_i y$, pero no se cumple $y \succsim_i x$. Por otra parte los agentes, en su conjunto, tienen acceso a planes de producción contenidos en un subconjunto $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Los recursos iniciales, las relaciones de preferencia y el conjunto de producciones posibles satisfacen las siguientes hipótesis:

Positividad estricta de los recursos iniciales. Sea:

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+ \qquad [1]$$

entonces $\omega_k > 0$, para todo k.

Monotonía. Si:

$$x, z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+, x \neq z, x \geqslant z \qquad [2]$$

entonces $x \succ_i z$, para todo $i = 1, ..., m$.

Convexidad. Si:

$$x, z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+ \quad \text{con} \quad x \succ_i z \qquad [3]$$

entonces $tx + (1 - t)z \succsim_i z$, para cada $i = 1, ..., m$.

Continuidad. Para cada $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+$, los conjuntos:

$$\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+ : x \succ_i z\} \quad \text{y} \quad \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+ : z \succ_i x\} \qquad [4]$$

son abiertos relativos en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+$ con la topología producto.

El conjunto de producción posible $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un

$$\text{cono cerrado, convexo, con vértice cero} \qquad [5]$$

Además:

$$Y \cap \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} = \{0\} \quad \text{y} \quad -\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \subset Y \qquad [6]$$

Si $y \in Y$, existe $l_0 \in \mathbb{N}$, tal que $y^l \in Y$, para todo $l \geqslant l_0$, en donde:

$$y_k^l = \begin{cases} y_k & \text{si} \quad k \leqslant l \\ 0 & \text{si} \quad k > l \end{cases} \qquad [7]$$

es decir, $y^l = (y_1, y_2, \ldots, y_l, 0, \ldots)$.

Las hipótesis [1]-[6] son utilizadas habitualmente para establecer la existencia de equilibrio en dimensión finita (Debreu, 1976). Las hipótesis [1]-[4] son las utilizadas por Peleg y Yaari en su referido trabajo, la hipótesis [7] es la única introducida explícitamente en este artículo y se justifica en el sentido de que si una producción $y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots)$ es posible para los agentes de una economía, entonces también es posible la producción resultante del cese de la actividad económica a partir de un período de tiempo posiblemente muy lejano.

Un sistema de precio en la economía E se define como una sucesión de números reales no negativos $p = (p_1, \ldots, p_k, \ldots)$ que asigna un valor finito a los recursos iniciales:

$$p(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \omega_k < +\infty$$

Un equilibrio en la economía E es una $(m + 2)$-upla $(x_1, \ldots, x_m, y, p)$ tal que:

(α) p es un sistema de precios

(β) para cada $i = 1, \ldots, m$, x_i es un consumo $\geqq_i$-maximal en el conjunto presupuestario del i-ésimo agente:

$$B(i, p) = \{x \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} : p(x) \leqslant p(\omega)\}$$

(γ) $\sum_{i=1}^{m} (x_i - \omega_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i - \omega = y \in Y$

(δ) y maximiza el beneficio en Y con respecto a p; es decir:

$$p(y) = \max_{z \in Y} p(z)$$

3. Existencia de equilibrio

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente,

Teorema. Existen planes de consumo $x_i \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, m$, un plan de producción $y \in Y$ y un sistema de precios p tales que $(x_1, \ldots, x_m, y, p)$ es un equilibrio en la economía E.

En primer lugar obtendremos la $(m + 1)$-upla $(x_1, ..., x_m, y)$ seleccionándola entre los elementos del núcleo de la economía E. Una $(m + 1)$-upla $(x_1, ..., x_m, y)$ es un estado realizable de la economía E si, $x_i \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, para cada $i = 1, ..., m$, $y \in Y$, siendo $\sum_{i=1}^{m} x_i - \omega = y$. El núcleo de E está formado por todos los estados realizables que no están bloqueados por ninguna coalición de agentes $S \subset \{1, ..., m\}$. Un estado de la economía está bloqueado por una coalición de agentes S si existen $z_i \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ para cada $i \in S$ e $y' \in Y$ tales que: i) $\sum_{i \in S} z_i - \sum_{i \in S} \omega_i = y'$; ii) $z_i \succ_i x_i$, para todo $i \in S$. El núcleo de una economía con producción ha sido estudiado, entre otros, por Boehm (1974), quien establece que en determinadas hipótesis el núcleo es no vacío. Este resultado se adapta sin dificultad a nuestra situación, obteniéndose que el núcleo es un compacto no vacío (en el caso de espacios de mercancías de dimensión infinita más generales, existen recientes generalizaciones de los resultados de Boehm (1974) y Debreu-Scarf (1963), véase Aliprantis-Brown-Burkinshaw (1983a), y (1983b); Besada-Estévez-Hervés (1986).)

Para cada número natural r, sea E_r la economía que se obtiene si cada agente de la economía E se considera r veces con idénticos recursos iniciales y relaciones de preferencias. Así pues en E_r hay rm agentes, siendo los r primeros idénticos entre sí, y los r segundos, etc. La economía E_r está en las mismas hipótesis que E por lo que su núcleo $\mathcal{N}_r$ es un compacto no vacío. Se establece a continuación un resultado de «igual tratamiento» en el núcleo de la economía réplica de E.

Lema. En las hipótesis establecidas para la economía E, si $(x_{11}, ..., x_{1r}, x_{21}, ..., x_{mr}, y)$ es un estado del núcleo de E_r, entonces $x_{i1} \sim x_{i2} \sim \cdots \sim x_{ir}$, para cada $i = 1, 2, ..., m$; esto es, los planes de acción de los agentes del mismo tipo son indiferentes.

Demostración. Sea $(x_{iq}) \in \mathcal{N}_r$ y definamos $x_i = \frac{1}{r} \sum_{q=1}^{r} x_{iq}$. Si los planes de los agentes del mismo tipo no fueran todos indiferentes, existiría un $j \in I$, tal que $x_j \succ_j x_{jq'}$ para algún q', debido a la hipótesis de la convexidad de las preferencias. Por otra parte, se verifica $\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{q=1}^{r} x_{iq} - r\omega_i \right) \in Y$, con lo que:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{q=1}^{r} x_{iq} - r\omega_i \right) = r\left(\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{i=1}^{m} \omega_i \right) \in Y$$

y por ser Y un cono convexo con vértice cero, $\sum_{i=1}^{m} (x_i - \omega_i) \in Y$. De aquí se deduce que la coalición I, formada por un agente de cada tipo, bloquea a (x_{iq}), pues:

i) $\sum_{i=1}^{m} (x_i - \omega_i) \in Y$.

ii) $x_i \succeq_i x_{iq'}$, para todo $i \in I$, y $x_j \succ_j x_{jq'}$.

c.q.d.

Podemos identificar cada estado de $\mathcal{N}_r$ con un estado de la economía E, asignando a $x_{i1}, ..., x_{ir}$ el elemento $x_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} x_{ij}$. Sea $\mathcal{N}_r^*$ el conjunto de los estados de E que se corresponden de este modo con elementos de $\mathcal{N}_r$; $\mathcal{N}_r^*$ es un compacto no vacío y además, es evidente que si una coalición bloquea un estado en E_r, bloquea también al «mismo» estado en E_{r+1}, por lo que $\mathcal{N}_r^* \supset \mathcal{N}_{r+1}^*$. En consecuencia, $\mathcal{N}^* = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_r^*$ no es vacío.

4. El precio de equilibrio

Sea $(x_1, ..., x_m, y) \in \mathcal{N}^*$. En esta sección nos proponemos obtener un sistema de precios p tal que $(x_1, ..., x_m, y, p)$ es un equilibrio en la economía E.

Consideremos para cada $i \in \{1, ..., m\}$:

$$F_i = \{x \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} : x \gtrsim_i x_i\}$$

$$G_i = F_i - \omega_i = \{z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : z + \omega_i \gtrsim_i x_i\}$$

$$F_i^0 = \{x \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} : x \succ_i x_i\}$$

$$G_i^0 = F_i^0 - \omega_i = \{z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : z + \omega_i \succ_i x_i\}$$

y denotemos por G la envolvente convexa de la unión de los conjuntos G_i, $G = Co\left(\bigcup_{i=1}^{m} G_i\right)$ y análogamente $G^0 = Co\left(\bigcup_{i=1}^{m} G_i^0\right)$.

En el citado artículo de Peleg y Yaari (1970) se definen los conjuntos F_i, G_i y G; con relación a G se establece:

$$\text{Si } y \in G \text{ y } z > y, \text{ entonces } z \in G \qquad [8]$$

$$G \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \qquad [9]$$

El elemento 0 pertenece a G, pero no admite una representación del tipo:

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i, \text{ con } \alpha_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, z_i \in G_i^0 \qquad [10]$$

Con relación a G^0 y al conjunto Y se verifica:

Lema 1

$$G^0 \cap Y = \emptyset \qquad [11]$$

En efecto, en otro caso existiría $z \in Y$ tal que:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i, \quad \alpha_i \geqslant 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \quad z_i \in G_i^0$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, definamos $a_i^k = E[k\alpha_i + 1]$ (parte entera de $k\alpha_i + 1$), sea $\mathcal{J} = \{i : \alpha_i > 0\}$, y si $i \in \mathcal{J}$, $z_i^k = \dfrac{k\alpha_i}{a_i^k} z_i$.

Observamos que $z_i^k + \omega_i \in L[\omega_i, z_i + \omega_i]$ (segmento que une ω_i con $z_i + \omega_i$), pues:

$$\frac{k\alpha_i}{a_i^k}(z_i + \omega_i) + \left(1 - \frac{k\alpha_i}{a_i^k}\right)\omega_i = z_i^k + \omega_i$$

además $z_i^k + \omega_i$ converge a $z_i + \omega_i$ cuando k tiende a infinito. Por ser $z_i \in G_i^0$, $z_i + \omega_i \succ_i x_i$ y por la continuidad de las preferencias, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geqslant k_0$, $z_i^k + \omega_i \succ_i x_i$ y:

$$\sum_{i \in J} a_i^k z_i^k = k \sum_{i \in J} \alpha_i z_i = kz \in \Upsilon$$

Consideremos la coalición formada por a_i^k agentes del tipo i, $i \in \mathcal{J}$, de forma que a cada agente del tipo i le asignamos el plan $z_i^k + \omega_i$. La coalición S así formada bloqueará en la economía E_r al estado correspondiente a $(x_1, ..., x_m)$, en donde $k \geqslant k_0$, y $r = \max\limits_{i \in J} \{a_i^k\}$. En efecto:

i) $\sum\limits_{i \in S} a_i^k(z_i^k + \omega_i - \omega_i) = kz \in \Upsilon$.

ii) $z_i^k + \omega_i \succ_i x_i$, para cada $i \in S$.

c.q.d.

Sea $e_1 = (1, 0, 0, ...)$ y para cada $\varepsilon > 0$ denotamos:

$$\Upsilon(\varepsilon) = \Upsilon - \varepsilon e_1$$

en relación con $\Upsilon(\varepsilon)$ y G se verifica,

Lema 2

$$\Upsilon(\varepsilon) \cap G = \varnothing \qquad [12]$$

En efecto, en caso contrario existiría $z \in \Upsilon(\varepsilon)$ tal que $z = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i z_i$, con $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, $z_i \in G_i$ y $\alpha_i \geqslant 0$ para cada $i \in I$, además $z = y - \varepsilon e_1$, con $y \in \Upsilon$. Sea $z_i' = z_i + \varepsilon e_1$; se verifica: a) $z_i' + \omega_i \succ_i z_i + \omega_i$ por la hipótesis de monotonía, y b) $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i z_i' = y$. Finalmente, por a) $z_i' \in G_i^0$, para cada i, y de aquí $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i z_i \in G^0 \cap \Upsilon$ por b) lo que está en contradicción con [11].

c.q.d.

Consideremos el compacto $K = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y_k| \leqslant 1, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}$ y para cada $\varepsilon > 0$ denotemos $Y^*(\varepsilon) = Y(\varepsilon) \cap K$.

Para $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $Y^*(\varepsilon)$ es un compacto no vacío, y como G es cerrado, convexo, no vacío e $Y^*(\varepsilon) \cap G = \emptyset$, un teorema de separación (Jarchof, H. (1981)) permite garantizar la existencia de un $\delta \in \mathbb{R}$ y un $p \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ que verifican $p(g) > \delta > p(y^*)$, para todo $g \in G$, $y^* \in Y^*(\varepsilon)$. Nótese que $\delta < 0$, pues $0 \in G$). Poniendo:

$$Y^*(\varepsilon) = (Y - \varepsilon e_1) \cap K = Y \cap K(\varepsilon) - \varepsilon e_1$$

donde $K(\varepsilon)$ denota:

$$\{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y_1 - \varepsilon| \leqslant 1, |y_k| \leqslant 1, \text{ para todo } k \geqslant 2\}$$

la desigualdad anterior se escribe:

$$p(g) > \delta > p(y - \varepsilon e_1), \quad \text{para todo } g \in G, y \in Y \cap K(\varepsilon)$$

lo que equivale a:

$$p(g) > \delta > p(y) - \varepsilon p_1, \quad \text{para todo } g \in G, y \in Y \cap K(\varepsilon) \qquad [13]$$

como además el conjunto $G \cap Y \cap K(\varepsilon)$ es no vacío (pues en particular contiene el cero) resulta que, si $v \in G \cap Y \cap K(\varepsilon)$, se tiene:

$$p(v) > \delta > p(v) - \varepsilon p_1$$

con lo cual, $p_1 > 0$, pudiéndose suponer, sin pérdida de generalidad, que $p_1 = 1$ y, como $0 \in Y \cap K(\varepsilon) \cap G$, de la desigualdad [13] se deducen los dos lemas siguientes.

Lema 3

$$p(g) > -\varepsilon, \quad \text{para todo } g \in G \qquad [14]$$

$$p(y) < \varepsilon, \quad \text{para todo } y \in Y \cap K(\varepsilon) \qquad [15]$$

Lema 4

$$p > 0 \qquad [16]$$

En efecto, si existiese una coordenada $p_r < 0$, dado $g \in G$ con $p(g) = a > -\varepsilon$, el vector $g' = g + \dfrac{a + 2\varepsilon}{-p_r} e_r$, está en G por [8], luego $p(g') = -2\varepsilon$, que contradice [14].

c.q.d.

Por la hipótesis de continuidad de las preferencias, los conjuntos $\{x : x \succ_i x_i\}$ son abiertos relativos en $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, y por la hipótesis de monotonía, $x_i' = x_i + e_1 \succ_i x_i$; existe, pues, un entorno de x_i' en el cual todos los puntos son estrictamente preferidos a x_i; además, como un entorno en $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ está determinado por un número finito de coordenadas, podemos escoger $d_1, ..., d_m$, tales que para cada $i \in I$, se verifique: $d_i \succ_i x_i$, $d_{i1} = x_{i1} + 1$ y $d_{ik} = 0$, para todo k, a partir de cierto k_0. Denotemos por $d = \sum_{i=1}^{m} d_i$ y para $0 < \varepsilon \leqslant 1$ definamos los conjuntos:

$$P_1(\varepsilon) = \{p \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : p \geqslant 0, p(d) = 1 \text{ y } p(g) \geqslant -\varepsilon, \text{ para todo } g \in G\}$$
$$P_2(\varepsilon) = \{p \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : p \geqslant 0, p(y) \leqslant \varepsilon, \text{ para todo } y \in Y \cap K(\varepsilon)\}$$

y sea $Q(\varepsilon) = P_1(\varepsilon) \cap P_2(\varepsilon)$. (Nótese que las series $p(g) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k g_k$ y $p(y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k y_k$ pueden no ser convergentes, en cuyo caso $p(g)$ y $p(y)$ representan el límite superior de las respectivas sucesiones de sumas parciales.)

Lema 5. Para cada $\varepsilon \in (0, 1)$ el conjunto $Q(\varepsilon)$ es no vacío y compacto en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. [17]

En efecto, las consideraciones anteriores garantizan que $Q(\varepsilon)$ es no vacío, pues el funcional $p \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ verifica [14] y [15], y si $p(d) \neq 1$, siempre sería $p(d) > 1$ y, por tanto, $p' = p/p(d)$ pertenece a $Q(\varepsilon)$. El conjunto $P_1(\varepsilon)$ es compacto, pues coincide con el conjunto $P(\varepsilon)$ considerado por Peleg y Yaari (1970), donde se establece su compacidad. Es, pues, suficiente demostrar que $P_2(\varepsilon)$ es cerrado. Sea $\{p_n\} \subset P_2(\varepsilon)$ y supongamos que $p_0 = \lim_{n\to\infty} p_n$, veamos que $p_0 \in P_2(\varepsilon)$.

Si no fuese así, existiría $y \in Y \cap K(\varepsilon)$ tal que $p_0(y) > \varepsilon$, y podemos poner $p_0(y) \geqslant a > \varepsilon$; $p_0(y)$ puede converger o no, pero, en cualquier caso, dado l_0' cualquiera siempre existe $l \geqslant l_0'$ con $p_0(y^l) > \dfrac{\varepsilon + a}{2}$. Por la hipótesis [7] dado y, existe l_0 tal que $y^l \in Y \cap K(\varepsilon)$, para todo $l \geqslant l_0$. Entonces siempre existe $l \geqslant l_0$ que verifica las dos condiciones anteriores.

Tomando $M = \sum_{k=1}^{l} |y_k|$ y $\xi < \dfrac{a - \varepsilon}{2M}$, por la convergencia de p_n, existe $n_0 = n_0(M, l, \varepsilon)$, tal que si $n \geqslant n_0$, $|p_{nk} - p_{0k}| < \xi$, para todo $k = 1, ..., l$, y:

$$|p_n(y^l) - p_0(y^l)| = \left|\sum_{k=1}^{l} p_{nk} y_k - \sum_{k=1}^{l} p_{0k} y_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{l} \xi |y_k| < \frac{a - \varepsilon}{2}$$

con lo que:

$$p_n(y^l) > p_0(y^l) - \frac{a - \varepsilon}{2} > \varepsilon$$

lo que está en contradicción con que $p_n \in P_2(\varepsilon)$.

c.q.d.

Como consecuencia de este lema y de que si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $Q(\varepsilon_1) \subset Q(\varepsilon_2)$, obtenemos que el conjunto $Q^* = \bigcap_{0<\varepsilon<1} Q(\varepsilon)$ es no vacío.

Lema 6. Si $p \in Q^*$, se verifica que $p(y) \leqslant 0$, para todo $y \in Y$. [18]

Demostración. Probaremos este resultado en dos partes:

i) $p(y) \leqslant 0$, para todo $y \in Y \cap 1/2K$.

ii) $p(y) \leqslant 0$, para todo $y \in Y$.

i) Si $y \in Y \cap 1/2K$, $y \in Y \cap K(\varepsilon)$, para todo $\varepsilon < 1/2$, pues $1/2K \subset K(\varepsilon)$, para todo $\varepsilon < 1/2$. Si $p \in Q^*$, $p \in Q(\varepsilon)$, para todo $\varepsilon < 1/2$, con lo que:

$$p(y) \leqslant \varepsilon, \quad \text{para todo } \varepsilon < 1/2, \text{ y por lo tanto}$$
$$p(y) \leqslant 0, \quad \text{para todo } y \in Y \cap 1/2K$$

ii) Si existe un $y \in Y$ tal que $p(y) > 0$, por la hipótesis [7], existe un l_0 tal que para todo $l \geqslant l_0$, $y^l \in Y$. Por ser $p(y) > 0$, dado l_0, existe $l \geqslant l_0$ tal que $p(y^l) > 0$, y por ser Y un cono convexo con vértice cero, existe $t > 0$ tal que $ty^l \in Y \cap 1/2K$; además $p(ty^l) = tp(y^l) > 0$, lo que contradice i).

c.q.d.

En lo que sigue se tomará un sistema de precios cualquiera de Q^*, y se procederá a probar que juntamente con $(x_1, ..., x_m, y)$ forma un equilibrio para la economía, siendo $y = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \omega_i)$.

Consideremos $p \in Q^*$. De la definición de Q^* se deduce:

$$p(g) \geqslant 0, \quad \text{para todo } g \in G \tag{19}$$

Si $u_i \in F_i$, $u_i - \omega_i \in G_i \subset G$; y de [19] se deduce:

$$p(u_i) \geqslant p(\omega_i), \quad \text{para cada } i = 1, ..., m \tag{20}$$

$$\text{en particular } p(x_i) \geqslant p(\omega_i), \quad \text{para cada } i = 1, ..., m$$

Como $\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{i=1}^{m} \omega_i = y$, por [18] se sigue que:

$$\sum_{i=1}^{m} p(x_i) = \sum_{i=1}^{m} p(\omega_i)$$

y de la desigualdad anterior se deduce que:

$$p(x_i) = p(\omega_i), \quad \text{para cada } i = 1, ..., m \tag{21}$$

Lema 7

$$p_k > 0, \quad \text{para todo } k \tag{22}$$

Demostración. Sabemos que $p_k \geqslant 0$. Supongamos que existe una coordenada r tal que $p(e_r) = 0$. Probaremos primero que existe un $s \in \mathbb{N}$ y un $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $p(e_s) > 0$ y $\omega_{js} > 0$. En efecto; en caso contrario, cualquiera que fuese $s \in \mathbb{N}$ y $j \in \{1, ..., m\}$, se tiene que $p(e_s) = 0$ o $\omega_{js} = 0$. Denotemos por $S = \{s : p(e_s) = 0\}$.

Si $s \in S$, $p(e_s) > 0$, $\omega_{js} = 0$ y entonces:

$$p(\omega_j) = \sum_{s \in S} p_s \omega_{js} + \sum_{s \notin S} p_s \omega_{js} = 0$$

con lo que $p(\omega) = 0$, lo que contradice la hipótesis [1].

Definamos ahora para cada $\varepsilon > 0$, el plan de consumo:

$$z^\varepsilon = x_j + e_r - \varepsilon e_s$$

Por ser $x_j + e_r \succ_j x_j$, y z^ε convergente a $x_j + e_r$ cuando ε tiende a cero, se tiene $z^\varepsilon \succ_j x_j$ para ε suficientemente pequeño y en este caso:

$$p(z^\varepsilon) = p(x_j) + p(e_r) - \varepsilon p(e_s) = p(\omega_j) - \varepsilon p(e_s) < p(\omega_j)$$

lo que está en contradicción con [20].

c.q.d.

Hasta este momento hemos encontrado planes de acción $(x_1, ..., x_m, y)$ y un elemento $p \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que cumplen una serie de propiedades que nos van a permitir a continuación comprobar que $(x_1, ..., x_m, y, p)$ es un equilibrio para la economía E; es decir, que se cumplen las condiciones (α), (β), (γ) y (δ) establecidas en la sección 2.

(α) p es un sistema de precios, pues por ser $d_i \succ_i x_i$, $g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (d_i - \omega_i) \in G$ y por [19] $p(g) \geqslant 0$, lo que significa $\frac{1}{m} p(d) - \frac{1}{m} p(\omega) \geqslant 0$ y como $p(d) = 1$, obtenemos $p(\omega) \leqslant 1$, lo que concluye que p es un sistema de precios.

(β) Para probar que x_i es $\succsim_i$-maximal en $B(i, p)$, distinguiremos dos casos:

a) Supongamos que $\omega_i = 0$, entonces:

$$B(i, p) = \{x : p(x) \leqslant p(\omega_i)\} = \{0\}$$

y por lo tanto $x_i = 0$.

b) Si $\omega_i \neq 0$, veamos que si $u \succ_i x_i$ entonces $u \notin B(i, p)$. La sucesión $v^n = u - \frac{1}{n} e_1$ converge a u, por lo que $v^n \succ_i x_i$ para n suficientemente grande y, en consecuencia, si u estuviese en $B(i, p)$ se tendría:

$$p(v^n) = p(u) - p(e_1) < p(u) \leqslant p(\omega_i)$$

lo que contradice [20].

(γ) Por ser $(x_1, ..., x_m, y)$ un elemento del núcleo.

(δ) $p(y) = \max_{z \in Y} p(z) = 0$, se deduce de la igualdad [21] teniendo en cuenta que por [18], si $z \in Y$, $p(z) \leqslant 0$.

Nótese que el estado $(x_1, x_2, ..., x_m)$ correspondiente al equilibrio obtenido es Pareto Eficiente en virtud de (δ).

Referencias

Aliprantis, C. D., y Brown, D. J. (1983): «Equilibria in Markets with a Riesz Space of Commodities», *Journal of Mathematical Economics, 12*, págs. 189-207.

Aliprantis, C. D.; Brown, D. J., y Burkinshaw, O. (1983a): «Edgeworth Equilibria», *Econometrica* (en prensa).

Aliprantis, C. D.; Brown, D. J., y Burkinshaw, O. (1983b): «Edgeworth Equilibria in Production Economies», *Journal of Economic Theory*. (En prensa.)

Araujo, A. (1985): «Lack of Pareto Allocations in Economies with infinitely many commodities. The need for Impatience, *Econometrica, 53*, 2, págs. 455-461.

Arrow, K. J., y Debreu, G. (1954): «Existence of Equilibrium for a Competitive Economy», *Econometrica, 26*, págs. 522-552.

Barkuki, R. A. (1977): «The Existence of an Equilibrium in Economic Structures with a Banach Space of Commodities», *Akad Nauk Azerbaijan SSR Dokl. 33*, págs. 8-12.

Besada, M. (1986): *Existencia de Equilibrio en Economías sin Horizonte Temporal,* Publicaciones de la Universidad de Santiago de Compostela.

Besada M.; Estévez M., y Hervés, C. (1986): «Núcleo de una Economía con infinitas mercancías», Preprint.

Bewley, T. F. (1972): «Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities», *Journal of Economic Theory, 4*, págs. 514-540.

Boehm V. (1974) «The Core of an Economy with Production», *Review of Economic Studies, 41*, págs. 429-436.

Brown D., y Lewis, L. (1981): «Myopic Economic Agents», *Econometrica, 49*, págs. 359-368.

Debreu, G. (1973): *Theory of Value*, New York, Wiley.

Debreu, G., y Scarf, H. (1963): «A Limit of the Core of an Economy», *International Economic Review, 4*, págs. 235-246.

Duffie, D. (1986): «Competitive Equilibria in General Choice Spaces», *Journal of Mathematical Economics, 15*, págs. 1-23.

Florenzano, M. (1983): «On the Existence of Equilibria in Economies with an Infinite Dimensional Commodity Space», *Journal of Mathematical Economics, 12*, págs. 207-219.

Gale, D., y Mas-Colell, A. (1975): «An Equilibrium Existence Theorem for a General Model without Ordered Preferences», *Journal of Mathematical Economics, 1*, págs. 9-15.

Hildebrand, W., y Kirman, A. P. (1976): *Introduction to Equilibrium Analysis*, North-Holland.
Jarchof, H. (1981), *Locally Convex Spaces*, B. G. Teubner.
Jones, L. E. (1983): «Existence of Equilibria with Infinitely Many Consumers and Infinitely Many Commodities», *Journal of Mathematical Economics*, *12*, págs. 119-138.
Khan M. Ali (1984): «A Remark on the Existence of Equilibria in Markets without Ordered Preferences and with a Riesz Space of Commodities», *Journal of Mathematical Economics*, *13*, págs. 165-169.
Khan M. Ali, y Vohra, R. (1984) «Equilibrium in Abstract Economies without Ordered Preferences and with a Measure Space of Agents», *Journal of Mathematical Economics*, *13*, págs. 133-142.
Magill, M. (1981): «An Equilibrium Existence Theorem», *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *84*, págs. 162-169.
Mas-Colell, A. (1986): «The Price Equilibrium Existence Problem in Topological Vector Lattices», *Econometrica*, *54*, págs. 1039-1053.
Mckenzie, L. W. (1981): «The Clasical Theorem of Existence of Competitive Equilibrium», *Econometrica*, *49*, págs. 819-841.
Negishi, T. (1960): «Welfare Economics and Existence of a Equilibrium for a Competitive Economy», *Metroeconomica*, *12*, págs. 92-97.
Ostroy, J. M. (1984): «On the Existence of Walrasian Equilibrium in Large-Square Economies», *Journal of Mathematical Economics*, *13*, págs. 143-163.
Peleg, B., y Yaari, M. (1970): «Markets with Countably Many Commodities», *International Economic Review*, *11*, págs. 369-399.
Rashid, S. (1978): «Existence of Equilibrium in Infinite Economies with Production», *Econometrica*, *46*, págs. 1155-1163.
Shafer, W. (1976): «Equilibrium in Economies without Ordered Preferences or Free Disposal», *Journal of Mathematical Economics*, *3*, págs. 135-137.
Shafer, W., y Sonnenschein, H. (1975): «Equilibrium in Abstract Economies without Ordered Preferences», *Journal of Mathematical Economics*, *2*, págs. 345-348.
Scarf, H. (1967): «The Core of an n-person Game», *Econometrica*, *35*, págs. 50-69.
Stigum, B. P. (1971): «Competitive Equilibria with Infinitely Many Commodities», *Metroeconomica*, *24*, págs. 221-244.
Toussaint, S. (1984): «On the Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities and without Ordered Preferences», *Journal of Economic Theory*, *33*, págs. 98-115.
Yamazaki, A. (1978): An Equilibrium Existence Theorem without Convexity Assumptions», *Econometrica*, *36*, págs. 541-555.
Yannelis, N. C., y Zame, W. R. (1986): «Equilibria in Banach Lattices without Ordered Preferences», *Journal of Mathematical Economics*, *15*, págs. 85-110.

Abstract

In this paper we state and prove a theorem concerning the existence of equilibrium in production economies in which a finite number of agents acts on countably many commodities. Starting in the classical assumptions the model is able to be adapted, in particular, to the situation in which the economy has not a time horizon. Our result is an extension of Peleg and Yaari's theorem by allowing the agents to have access to the production.

Recepción del original, abril de 1987.
Version final, octubre de 1987.