Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XII, n.º 1 (1988), págs. 159-167

LOS TEOREMAS DE STIEMKE Y TUCKER: UNA DEMOSTRACION ORIGINAL Y SU INTERPRETACION ECONOMICA

Rafael MIRANDA SERRANO*
Universidad de Málaga

En este trabajo se pretende dar demostraciones nuevas y elementales de unas desigualdades de Stiemke y Tucker. Al mismo tiempo se aprovecha la oportunidad para hacer una interpretación económica de la desigualdad de Stiemke utilizando para ello la noción de forma líneal y espacio dual de un espacio vectorial dado.

1. Introducción

A fines del siglo pasado dio Pareto (1896) una caracterización en términos de Cálculo diferencial de lo que ha venido a llamarse un óptimo de una economía, utilizando un sistema de precios.

Sin entrar en detalles que no son de este lugar, podemos decir que dados dos estados de una economía, A y B, se admite que B es al menos tan deseable como A si cualquier consumidor prefiere su consumo en B, al menos tanto como su consumo en A.

Un óptimo de Pareto viene a ser así un estado realizable, tal que dentro de las condiciones determinadas por los conjuntos de consumo, los conjuntos de producción y los recursos totales, no se puede satisfacer mejor las preferencias de cualquier consumidor sin atender peor las preferencias de otro consumidor.

Durante los primeros cincuenta años de nuestro siglo, los trabajos de Barone (1908), Hotelling (1938), Lange (1942), Allais (1943) y Bergson (1948), todos ellos formulados a la manera clásica, no habían conseguido ir mucho más allá de las primeras ideas de Pareto.

* Siguiendo la costumbre, para decir que un vector $\bar{x}$ no tiene ninguna componente negativa escribimos $\bar{x} \geqq \bar{0}$.

Si nos referimos a un vector que no tiene ninguna componente negativa y al menos una de ellas es positiva, lo representamos:

$$\bar{x} \geqslant \bar{0} \quad \text{(semipositivo)}$$

Cuando todas las componentes son positivas estrictamente, la notación es:

$$\bar{x} > \bar{0}$$

Agradecemos las observaciones que nos han hecho los evaluadores de la Revista y que han servido para que podamos escribir esta segunda versión de nuestro trabajo.

Hay que llegar a 1950 para que Arrow, en el «Second Berkeley Symposium» sobre Estadística Matemática y Probabilidad, y Debreu en una reunión de la «Econometric Society», en Harvard, tratasen de forma independiente el mismo problema, eso sí, utilizando ya los métodos de la teoría de conjuntos, que la obra colectiva de Bourbaki había contribuido a divulgar entre los economistas matemáticos.

Como consecuencia de estos trabajos surgió un nuevo e importante concepto: el de equilibrio relativo a un sistema de precios, y al menos dos teoremas fundamentales.

Por lo que se refiere al *concepto de equilibrio,* podemos afirmar que esencialmente consiste en decir que:

Dado un sistema de precios p, un estado realizable es un equilibrio respecto de p si ningún consumidor puede satisfacer mejor sus preferencias, sin que aumente su presupuesto y además que ningún productor puede aumentar su beneficio.

En cuanto a los dos teoremas fundamentales, cabe formularlos así:

Teorema 1. Bajo ciertas condiciones poco exigentes, si un estado realizable de una economía es un equilibrio relativo a un vector de precios, éste estado es óptimo.

Teorema 2. Establece la propiedad inversa de la anterior, o sea, que bajo ciertas condiciones algo diferentes del teorema 1, si un estado realizable de la economía es un óptimo de Pareto hay un sistema de precios respecto del cual este estado es un estado de equilibrio.

Pero de todo lo anterior lo que nos interesa de forma particular es que todas las demostraciones de estos teoremas se lograron gracias a los nuevos métodos empleados, sobresaliendo por su importancia la teoría de los conjuntos y conos convexos, los teoremas del hiperplano separador y las desigualdades de Farkas, Minkowski, Stiemke y Tucker.

Nosotros en esta nota nos ocuparemos de dar una demostración nueva y sencilla de dos de estas desigualdades: las de Stiemke y la de Tucker, y de otra parte damos una interpretación económica de la primera de ellas.

2. Los enunciados de los teoremas de Stiemke y Tucker

En el libro de Nikaido *Convex Structures* (1968), pág. 36, figuran las siguientes proposiciones.

Teorema de Stiemke

Dadas las ecuaciones:

$$A\bar{x} = \bar{0}$$

tienen solución $\bar{x} > \bar{0}$, si y sólo si, las ecuaciones:

$$A'\bar{p} \geqslant \bar{0}$$

no tienen solución.

Teorema de Tucker

El sistema de desigualdades lineales $A'\bar{p} \geqslant \bar{0}$ y el sistema de ecuaciones lineales $A\bar{x} = \bar{0}$ tiene siempre un par de soluciones $\bar{p}$ y $\bar{x}$ tales que:

$$A'\bar{p} + \bar{x} > \bar{0}$$

La demostración

Leyendo las pruebas que ofrece Nikaido, nos pareció oportuno buscar demostraciones más directas y simples. El objeto de esta nota es presentar estas demostraciones, acompañadas de una interpretación económica.

2.1. *Teorema de Stiemke*

Parte *a*) La condición $A\bar{x} = \bar{0}$, con $\bar{x} > \bar{0}$ es suficiente para que $A'\bar{p} \geqslant \bar{0}$ no tenga solución.

En el enunciado anterior A es la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

definida en el cuerpo de los reales, $\bar{x}$ es el vector:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

siendo $\bar{p}$ el vector:

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}$$

Tanto $\bar{x}$ como $\bar{p}$ son vectores reales. A' es la traspuesta de A. El sistema:

$$A\bar{x} = \bar{0}_m$$

se puede escribir:

$$\bar{a}_1 x_1 + \cdots + \bar{a}_n x_n = \bar{0}_m \qquad [1]$$

donde las $\bar{a}_i$ son los vectores formados por las columnas de A y el sistema $A'\bar{p} \geqslant \bar{0}_n$ después de trasponerlo queda:

$$\bar{p}'A \geqslant \bar{0}'_n \qquad [2]$$

$\bar{0}_m$ y $\bar{0}_n$ son vectores columna nulos de m y n componentes, respectivamente.

La [2] nos dice que $\bar{p}'A$ es un vector semipositivo, que podemos escribir así:

$$\bar{p}' \cdot \bar{a}_1 \geqslant 0 \quad \bar{p}' \cdot \bar{a}_2 \geqslant 0 \quad \cdots \quad \bar{p}' \cdot \bar{a}_n \geqslant 0 \qquad [3]$$

Si multiplicamos estas desigualdades por los números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ y sacamos $\bar{p}'$ factor común después de sumar las [3], resulta:

$$\bar{p}'(\bar{a}_1 x_1 + \cdots + \bar{a}_n x_n) > 0 \qquad [4]$$

ya que de las [3] una al menos es positiva.

Pero la condición $A\bar{x} = \bar{0}$ nos dice que el paréntesis de [4] es nulo y su producto escalar por $\bar{p}'$ no puede dar un valor mayor que cero, luego no hay ningún $\bar{p}$ que satisfaga a:

$$A'\bar{p} \geqslant \bar{0} \qquad [5]$$

Parte *b*) Que la condición $A'\bar{p} \geqslant \bar{0}$ no tenga solución es necesario para que $A\bar{x} = \bar{0}$, con $\bar{x} > \bar{0}$.

Si no hay ningún $\bar{p}_m$ que satisfaga a $\bar{p}'A \geqslant \bar{0}'_n$, no podrán cumplirse todas y cada una de las desigualdades:

$$\bar{p}' \cdot \bar{a}_1 \geqslant 0 \quad \bar{p}' \cdot \bar{a}_2 \geqslant 0 \quad \cdots \quad \bar{p}' \cdot \bar{a}_n \geqslant 0$$

luego después de reordenarlas y volverlas a indicear habrá i mayores que cero, j nulas y $n - i - j$ menores que cero, cosa que escribiremos:

$$\begin{gathered}
\bar{p}' \cdot \bar{a}_1 > 0 \cdots \bar{p}' \cdot \bar{a}_i > 0 \\
\bar{p}' \cdot \bar{a}_{i+1} = 0 \cdots \bar{p}' \cdot \bar{a}_{i+j} = 0 \\
\bar{p}' \cdot \bar{a}_{i+j+1} < 0 \cdots \bar{p}' \cdot \bar{a}_n < 0
\end{gathered}$$

Multiplicando por $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ..., $x_n > 0$ ordenadamente y sumando, queda:

$$\begin{gathered}
(\bar{p}' \cdot \bar{a}_1 x_1 + \cdots \bar{p}' \cdot \bar{a}_i x_i) + (\bar{p}' \cdot \bar{a}_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \bar{p}' \cdot \bar{a}_{i+j} x_{i+j}) + \\
+ (\bar{p}' \cdot \bar{a}_{i+j+1} x_{i+j+1} + \cdots + \bar{p}' \cdot \bar{a}_n x_n)
\end{gathered}$$

que da un número positivo para el primer paréntesis, cero para el segundo y negativo para el tercero.

Sacando $\bar{p}'$ factor común, resulta:

$$\bar{p}'(\bar{a}_1 x_1 + \cdots + \bar{a}_n x_n) \qquad [6]$$

La arbitrariedad de las $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ nos permite que podamos anular el paréntesis de [6], es decir, que digamos:

$$A\bar{x} = \bar{0} \quad \text{para} \quad \bar{x} > \bar{0}$$

como queríamos demostrar.

2.2. *El teorema de Tucker*

Para probar el teorema, negaremos la tesis buscando que esto nos lleve a alguna contradicción con la hipótesis, es decir, empleamos la demostración por reducción al absurdo.

Como el teorema nos dice que el sistema de inecuaciones lineales $A\bar{p} \geqq \bar{0}$ y el sistema de ecuaciones lineales $A\bar{x} = \bar{0}$, con valores no negativos, $\bar{x} \geqq \bar{0}$ siempre tiene un par de soluciones $\bar{p}$ y $\bar{x}$ tales que $A'\bar{p} + \bar{x} > \bar{0}$, diremos que no se cumple la:

$$A'\bar{p} + \bar{x} > \bar{0} \qquad [7]$$

Si designamos, como antes, por $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ las columnas de A, la negación de la tesis consiste en decir que hay filas de [7] que son nulas, y otras que son positivas (filas negativas no pueden considerarse porque requerirían contradecir una al menos de las hipótesis $A'\bar{p} \geqq \bar{0}$ o $A\bar{x} = \bar{0}$). Reordenando las desigualdades y volviendo a indicearlas adecuadamente, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} \bar{a}'_1 \cdot \bar{p} + x_1 = 0 \\ \quad\vdots \\ \bar{a}'_i \cdot \bar{p} + x_i = 0 \end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l} \bar{a}'_{i+1} \cdot \bar{p} + x_{i+1} > 0 \\ \quad\vdots \\ \bar{a}'_{i+j} \cdot \bar{p} + x_{i+j} > 0 \end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l} \bar{a}'_{i+j+1} \cdot \bar{p} + x_{i+j+1} > 0 \\ \quad\vdots \\ \bar{a}'_{i+j+k} \cdot \bar{p} + x_{i+j+k} > 0 \end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l} \bar{a}'_{i+j+k+1} \cdot \bar{p} + x_{i+j+k+1} > 0 \\ \quad\vdots \\ \bar{a}'_n \cdot \bar{p} + x_n > 0 \end{array}\right.
\end{array}\right\} \text{[8] que desglosadas dan} \quad
\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{ll} \bar{a}'_1 \cdot \bar{p} = 0 & x_1 = 0 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \bar{a}'_i \cdot \bar{p} = 0 & x_i = 0 \end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{ll} \bar{a}'_{i+1} \cdot \bar{p} > 0 & x_{i+1} = 0 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \bar{a}'_{i+j} \cdot \bar{p} > 0 & x_{i+j} = 0 \end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{ll} \bar{a}'_{i+j+1} \cdot \bar{p} = 0 & x_{i+j+1} > 0 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \bar{a}'_{i+j+k} \cdot \bar{p} = 0 & x_{i+j+k} > 0 \end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{ll} \bar{a}'_{i+j+k+1} \cdot \bar{p} > 0 & x_{i+j+k+1} > 0 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \bar{a}'_n \cdot \bar{p} > 0 & x_n > 0 \end{array}\right.
\end{array}\right\} [9]$$

En las fórmulas [8] hemos efectuado una partición, atendiendo a los valores posibles, y en [9] esta partición ha sido desglosada.

Si multiplicamos las expresiones de la primera columna de [9] por $x_1, x_2, ..., x_n$, sumamos y sacamos $\bar{p}$ factor común, queda:

$$(\bar{a}'_1 x_1 + \cdots + \bar{a}'_n x_n) \cdot \bar{p} > 0$$

que trasponiendo, se puede escribir:

$$\bar{p}' \cdot (\bar{a}_1 x_1 + \cdots + \bar{a}_n x_n) > 0$$

es decir:

$$\bar{p}' \cdot A\bar{x} > 0 \qquad [10]$$

Pero al comparar la [10] con la condición $A\bar{x} = \bar{0}$, $\bar{x} \geqq \bar{0}$, nos lleva a la contradicción que esperábamos, ya que $\bar{p}'A\bar{x}$ no puede ser mayor que cero, si $A\bar{x} = \bar{0}$.

3. Interpretación económica

Después de haber probado los dos teoremas, vamos a dar una interpretación económica del teorema de Stiemke.

Para facilitar la exposición, supondremos que partimos de tres inputs que llamamos I_1, I_2, I_3, y que mediante una matriz A de dos filas y tres columnas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

desembocamos en dos outputs, que llamaremos O_1, O_2.

Esto se representa así:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

donde x_1, x_2 y x_3 son las cantidades que se utilizan de los imputs I_1, I_2 y I_3 e y_1, y_2 son las cantidades que resultan de los outputs O_1, O_2.

Tanto los inputs como los outputs forman sendos espacios vectoriales E_3, F_2 y el significado de una expresión como la:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1$$

es el siguiente: a_{11}, a_{12}, a_{13} son las cantidades de inputs I_1, I_2, I_3 que es preciso utilizar para producir una unidad de output O_1. Después de multiplicarlas por x_1, x_2, x_3, resulta el output final I_1. Análogamente, para:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2$$

Los espacios E_3, F_2 admiten espacios duales E_3^*, F_2^*, en los que sus elementos serán los precios q_1, q_2, q_3 de los factores, y p_1, p_2 de los bienes. ¿Cómo podemos fijar estos precios y qué significará la matriz traspuesta de la A?

Para responder a estas preguntas elijamos arbitrariamente la matriz A y los valores x_1, x_2, x_3, diciendo, por ejemplo, que:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}7 \end{bmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(los valores de a_{ij} han de ser números reales positivos).

Una representación gráfica nos va a servir para exponer todo el proceso.

El producto $A\bar{x}$ vale:

$$\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} \overset{E_3}{\bullet} \xrightarrow{\quad A \quad} \overset{F_2}{\bullet} \begin{vmatrix} Y_1 \\ \\ Y_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{vmatrix} \overset{E_3^*}{\bullet} \xleftarrow{\quad A' \quad} \overset{F_2^*}{\bullet} \begin{vmatrix} P_1 \\ \\ P_2 \end{vmatrix}$$

Ha resultado un vector y_1, y_2 de bienes con 2,5 de O_1 y 3,4 de O_2 empleando un vector q_1, q_2, q_3 de factores 1, 2, 3, de I_1, I_2, I_3.

Ahora debemos pasar a determinar los elementos de los espacios duales E_3^*, F_2^*, es decir (q_1, q_2, q_3) y (p_1, p_2), o sea, los precios.

Empecemos por F_2^*. Una forma lineal, que puede ser, por ejemplo:

$$L = a_1L_1 + a_2L_2$$

es una combinación lineal de las formas L_1, L_2, siendo estas las que hacen corresponder a los vectores base $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ de F_2 los vectores base $\bar{e}_1^*$, $\bar{e}_2^*$ de F_2^*:

$$L_1(\bar{e}_1) = \bar{e}_1^* \quad L_1(\bar{e}_2) = \bar{0}$$
$$L_2(\bar{e}_2) = \bar{e}_2^* \quad L_2(\bar{e}_1) = \bar{0}$$

Si tomamos arbitrariamente $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, la L será:

$$L = 3L_1 + 2L_2$$

que aplicada al vector output y, $2{,}5e_1 + 3{,}4e_2$, da:

$$L(2{,}5e_1 + 3{,}4e_2) = 7{,}5 + 6{,}8 = 14{,}3$$

Este 14,3 es el valor del output total habiendo convenido que 3 y 2 son los precios del primero y segundo output.

Aplicando ahora la matriz traspuesta de la A al vector de precios (p_1, p_2) de F_2^*, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 2{,}7 \\ 2{,}6 \end{bmatrix}$$

Las componentes 1,1, 2,7, 2,6 son los precios q_1, q_2, q_3 de los inputs, ya que cualquiera de ellas, la primera misma, es el resultado de multiplicar (a_{11}, a_{21}) por (p_1, p_2), y (a_{11}, a_{21}) son las cantidades de input I_1, I_2 requeridas para producir una unidad de bien 1 y otra unidad de bien 2.

Si el sistema económico no arroja ningún beneficio, que es el caso que estamos suponiendo, el producto escalar de los inputs (1, 2, 3) por sus precios (1,1, 2,7, 2,6) ha de dar igual valor que el producto escalar de los outputs (2,5, 3,4) por sus precios (3, 2) y como se ve, los resultados coinciden:

$$1 \cdot 1{,}1 + 2 \cdot 2{,}7 + 3 \cdot 2{,}6 = 3 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 3{,}4 = 14{,}3$$

Una vez que hemos llegado a esta interpretación económica, es fácil ver lo que quiere decir el teorema de Stiemke.

En efecto, si cualesquiera que sean las intensidades x_1, x_2, x_3 con que se emplean los inputs primero, segundo y tercero, el resultado es un output $\bar{y} = \bar{O}_2$, es natural que no pueda haber un vector de precios p, tal que:

$$\bar{p} \cdot \bar{y} = \bar{q} \cdot \bar{x} \tag{11}$$

a no ser que los factores fueran libres y sus precios nulos. Siempre que no sea así, la única forma de obtener la igualdad [11] sería haciendo infinitos los precios del output, y esto no tiene ningún sentido económico.

Referencias

Allais, M. (1943): *A la recherche d'une Discipline Economique,* París, Imprimerie Nationale.

Arrow, K. J. (1951): *An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics,* U. California Press.

Baroné, E. (1908): *The Ministry of Production in the Collectivist State,* Londres, Routledge & Paul, Ltd.

Bergson, A. (1948): *Essays in Normative Economics,* Cambridge, Mass, Harvard, U. P.

Debreu, G. (1952): «A Social Equilibrium Existence Theorem», *Proceedings of the Nat Acad. of Sciences, 38,* págs. 886-893.

Hotelling, H. (1938): «The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and Railway and Utility Rates», *Econometrica, 6,* págs. 242-269.

Lange, O. (1942): «The Foundations of Welfare Economics», *Econometrica, 10,* págs. 215-228.

Nikaido, H. (1968): *Convex Structures and Economic Theory,* Academic Press, págs. 36-37.

Pareto, V. (1896-1897): *Cours d'èconomie politique,* Lausanne, Rouge.

Abstract

In this article we want to give some new and elementary proofs of Stiemke and Tucker's inequalities.

At this time, we profit the opportunity to make an economic interpretation of the Stiemke inequality using for this purpose the notion of lineal form and dual space of a given vectorial space.

Recepción del original, diciembre de 1986
Versión final, junio de 1987