Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XVI, n.º 1 (1992), págs. 89-97

VALORACION DE ACTIVOS FINANCIEROS POR EL METODO DE LAS MARTINGALAS

Miguel A. ARIÑO
Pablo FERNANDEZ
Instituto de Estudios Superiores de la Empresa

En este artículo hemos presentado la teoría de valoración de activos derivados por el método de las martingalas desarrollada por Harrison y Kreps en 1979. Como caso particular hemos calculado el valor de una opción compradora. Hemos intentado el máximo evitar las técnicas matemáticas y dar al lector las referencias necesarias.

1. Introducción

Nuestro propósito en este artículo es exponer la teoría de valoración de martingalas de Harrison y Kreps para poner precios a activos derivados en una economía en la que se dispone de un activo principal. En particular expondremos la fórmula de la opción compradora del activo principal, dado el proceso estocástico que siguen los precios del activo y la rentabilidad del activo sin riesgo: la famosa fórmula de Black-Scholes. Especificaremos también la «trading strategy» de la cartera duplicante del activo derivado.

Una completa y satisfactoria teoría de valoración de opciones ha sido desarrollada desde que Fisher Black and Myron Scholes (1973) escribieron su primer artículo sobre la valoración de opciones compradoras. Para llegar a su fórmula ellos crearon una cartera que instante a instante no tenía riesgo. Esta cartera consistía en la compra de una acción y de la venta de la opción. Esta posición se revisa continuamente de acuerdo con los cambios del valor de la acción de modo que la rentabilidad de esta cartera es segura. Para evitar oportunidades de arbitraje el valor de esta cartera en cualquier momento tiene que ser su valor final descontado a la tasa sin riesgo. Una ecuación en derivadas parciales se obtiene de la dinámica que gobierna esta cartera cuya solución con las condiciones de contorno habituales es la celebrada fórmula de Black-Scholes.

Merton (1977) encontró un modo general de valoración de activos derivados. Un activo derivado es un activo cuyo valor en una futura fecha especificada está únicamente determinado por el valor de otro activo, el activo principal. Una opción compradora es un activo derivado cuyo activo principal es la acción y por tanto, la valoración de opciones compradoras es una aplicación particular de este método de valoración de Merton que es más general.

Las hipótesis del modelo de valoración de activos de Merton son la existencia de un activo sin riesgo cuya tasa de retorno r es constante y conocida sobre el tiempo. Un activo para el cual se conoce el proceso estocástico que genera su valor sobre el tiempo, y que puede ser representado por un proceso de difusión, y un segundo activo, el activo derivado, cuyo valor en un momento determinado es función del valor del primer activo. El artículo de Merton da el valor de este segundo activo como solución de una ecuación en derivadas parciales con condiciones de contorno dependiendo de los términos del activo derivado. Merton también especifica la «trading strategy» a tiempo continuo que produce una cartera compuesta del activo sin riesgo y del primer activo, cuyo valor en cualquier instante es el valor del activo derivado. Este modelo permite que el activo principal y el activo derivado paguen a sus poseedores una corriente continua de dividendos y la estrategia que lleva la cartera duplicante es, en lenguaje de Harrison y Kreps, una estrategia autofinanciada. Es decir, que no son necesarios nuevos fondos para mantener la cartera distintos de los iniciales. Volveremos más tarde a este punto.

Un tratamiento diferente de la valoración de activos derivados fue sugerida por Cox y Ross (1976) y plenamente desarrollada por Harrison y Kreps (1979). Ellos dan condiciones sobre el precio de los activos para que sean martingalas en una adecuada filtración de un adecuado espacio de probabilidad. El valor actual de estos activos es su valor esperado futuro en este espacio de probabilidad.

Después de presentar este marco de martingalas en la segunda sección de este artículo (las referencias para entender este modelo son Cox, J. y Huang, D. (1986); Doffie, D. (1988); Harrison, J. M. y Kreps, M. (1979); Harrison, J. M. y Pliska, S. (1981)lo utilizaremos en la tercera sección para derivar una valoración de los activos derivados cuando se dispone del proceso estocástico que gobierna el precio del activo principal. Se da también la «trading strategy» para la cartera reduplicante del activo derivado. El propósito de este artículo es resumir y presentar de un modo sencillo el método de las martingalas para la valoración de activos derivados.

2. El modelo

Para formular el modelo de mercado comenzamos especificando un horizonte temporal T que es la fecha terminal de toda actividad económica. Los activos se pueden negociar en cualquier tiempo t entre 0 y T ($0 \leq t \leq T$). Fijamos también un espacio de probabilidad (Ω, F, P), donde cada $\omega \in \Omega$ se puede interpretar como una completa descripción de un posible estado del mundo. F es la σ-álgebra de sucesos distinguibles en el momento T, y P es una probabilidad sobre (Ω, F). Es necesario en el modelo que todos los inversores estén de acuerdo en qué sucesos F tienen una probabilidad positiva de ocurrir, pero no es necesario que estén de acuerdo en la asignación de probabilidades. El modelo permanece siendo válido si cambiamos P por cualquier probabilidad equivalente Q (una probabilidad Q es n la cual $P(A) > 0$ si y sólo si $Q(A) > 0$).

Los inversores están dotados de una estructura de información que es una familia de sub-σ-álgebras de $F = \{F_t{:}0 \le t \le T\}$ que es una completa especificación de la revelación de la información a lo largo del tiempo. Por ejemplo, si un suceso A pertenece a F_t entonces en el momento t los inversores conocen si el verdadero estado del mundo está en A o no. Supondremos que F es creciente ($F_t \subset F_s$ para $t \le s$) es decir, que la información revelada no se olvida. $F_T = F$ es decir, que en el momento T nosotros conocemos cual es el verdadero estado del mundo. En el momento 0 sólo conocemos los sucesos que tienen probabilidad 0 ó 1 de ocurrir. F es, en lenguaje probabilístico, una filtración. Más tarde explicaremos como los inversores obtienen esta estructura de información.

Los activos disponibles en el mercado son los habituales en la economía de Black-Scholes:

a) Un activo principal que por conveniencia supondremos no paga dividendos antes del momento T. Podemos pensar en una acción pero podría ser cualquier otro activo.

b) Un activo sin riesgo con tasa de rentabilidad conocida y constante r.

Supondremos que los precios s_t del activo principal a lo largo del tiempo siguen una distribución logaritmo normal, es decir:

$$S_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\,\omega(t)\right]$$

donde $\omega(t)$ es un movimiento Browniano standard (una buena referencia para el movimiento Browniano standard y para conceptos de probabilidad usados en esta teoría son Chung (1974) y Durret (1984). μ y σ se pueden considerar como funciones de t y S_t o como constantes.

El valor del activo sin riesgo en el momento t lo representamos $s_0(t)$. Este activo da derecho a un dólar en el momento T, por lo que

$$S_0(t) = \exp\left[-r(T-t)\right]$$

La información común F_t disponible en el momento t es la que revelan los precios del activo principal hasta el momento t. No se conocen cuales serán los precios después del momento t, por tanto F_t es la sub-σ-álgebra generada por S_s para $0 \le s \le t$. En lenguaje matemático.

$$F_t = \sigma\,\{S_s : 0 \le s \le t\} = \sigma\,\{\omega(s) : 0 \le s \le t\}$$

La última igualdad se verifica porque S_t y ω_t están deteminísticamente relacionados.

También supondremos que estamos en un mercado ni fricciones, es decir que no hay ni impuestos ni costes de transacciones. El tomar prestado y la venta a crédito está permitida sin restricciones y los tipos de interés para tomar prestado y para prestar son los mismos. La negociación tiene lugar continuamente (estamos en un mercado continuo).

Una «trading strategy» es un par de funciones Φ_0 y Φ_1 de $\Omega \times [0,T]$ en R. $\Phi_0(\omega,t)$ y $\Phi_1(\omega,t)$ son respectivamente el número de unidades del activo sin riesgo y del activo principal que el inversor tiene justo antes de negociar en el instante t. Una natural restricción sobre Φ_0 y Φ_1 es que sus valores son los mismos para estados del mundo que son indistinguibles antes del momento t, dada la estructura de información F. En lenguaje matemático eso significa que Φ_0 y Φ_1 son predictibles con respecto a la filtración F.

Una estrategia autofinanciada es una que no requiere ni genera fondos entre el momento 0 y T.

$$V(t) = \Phi_0(t)\, S_0(t) + \Phi_1(t)\, S_1(t) = \Phi_0(0)\, S_0(0) + \Phi_1(0)\, S(0) + \int_0^t \Phi_0(s)\, dS_0(s) + \int_0^t \Phi_1(s)\, dS_1(s) \qquad \text{para} \qquad 0 \le t \le T \qquad [1]$$

Esto significa que el valor de la estrategia en el momento t es su valor inicial más las ganancias o pérdidas de capital acumulada. La segunda integral en esta última expresión tiene que interpretarse como una integral estocástica.

Antes de enunciar el resultado clave de esta sección necesitamos una definición: una oportunidad de arbitraje es una «trading strategy» (Φ_0, Φ_1) con coste inicial cero y con una probabilidad positiva de que en el momento T tenga valor positivo. Es una oportunidad sin riesgo de obtener ingresos sin realizar ninguna inversión y por tanto no puede subsistir en una economía en equilibrio.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el principal hecho de nuestro modelo:

Proposición 1: (Cox, J. y Huang, D. (1986); Harrison, J. M. y Kreps, M. (1979): Harrison, J. M. y Pliska, S. (1981)). Si nuestro sistema de precios (S_0, S_1) no permite oportunidades de arbitraje, existe una probabilidad Q sobre (Ω,F), equivalente a P, para la cual el precio descontado del primer activo

$$S_1^*(t) = S_1(t)/S_0(t)$$

es una martingala. Además el recíproco es también cierto si sólo permitimos estrategias Φ_1 para las cuales

$$E^*\left(\int_0^t [\Phi_1(t)\, S_1^*(t)]^2\, dt\right) < \infty$$

donde E^* es el valor esperado bajo Q.

Una martingala sobre un espacio de medida (Ω,F,Q) con respecto a una filtración $F = (F_t)_t$ es un proceso estocástico $(X_t)_t$ cuyo valor esperado en una fecha futura es su valor actual

$$E_Q(X_s \mid F_t) = X_t \qquad \text{para } t \le s$$

Debe comentarse que los precios descontados de un activo no son los valores actuales de ese activo, sino que son los precios que tendrían en una economía en la que los tipos de interés fueran cero.

Un activo derivado se dice que es negociable si existe una estrategia autofinanciada que reduplica en cualquier momento el valor activo derivado. Si un activo derivado es negociable su valor tiene que ser el precio de esta estrategia duplicante autofinanciada. Si no hay oportunidades de arbitraje, todas las estrategias duplicantes tienen que tener el mismo precio, y este activo derivado se dice valorado por arbitraje.

En la proposición 1, si la probabilidad equivalente Q bajo la cual S_1^* es una martingala, es única, entonces todo activo derivado tiene un único precio compatible con (S_0, S_1) que es el valor neto del futuro valor esperado bajo Q. En este caso Q se llama la única martingala equivalente.

3. Los resultados

Nuestro propósito es exponer cómo se valora un activo derivado X cuyo valor en el momento T $X(T)$ es una función continua g del valor S_T en el momento T de nuestro activo: $X(T) = g(S_T)$, y también encontrar la estrategia autofinanciada que genera X.

3.1. La fórmula de valoración

Nuestro primer trabajo es encontrar la única martingala equivalente del modelo mencionado en la sección I.

Dado

$$S_0(t) = \exp[-r(T-t)]$$

$$S_1(t) = \exp\left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) t + \sigma\omega(t)\right]$$

los precios descontados de nuestros activos son

$$S_0^*(t) = 1$$

$$S_1^*(t) = S_1(t)/S_0(t) \exp(rT) \exp\left[\left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma\omega(t)\right]$$

Por el lema de *Itô*

$$dS_1^*(t) = \exp(rT)\,[S_1^*(t)\,(\mu - r)\,dt + S_1^*(t)\,\sigma d\omega(t)]$$

Sea

$$\eta(\omega) = \exp\left[-\int_0^T \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)\omega dt - \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 dt\right]$$

y

$$Q(A) = \int_A \eta(\omega)\, dP(\omega) \qquad \text{para } A \in F$$

Q es una medida de probabilidad sobre (Ω,F) equivalente a P. Si suponemos una condición técnica necesaria, por el teorema de Girsanov (ver Girsanov, I. (1960); Harrison, J. M. y Kreps, M. (1979)), como ω es un movimiento Browniano standard bajo P

$$\omega^*(t) = \omega(t) + \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) ds$$

es un movimiento Brawniano standard bajo Q.

$$d\omega^*(t) = d\omega(t) + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dt \qquad \text{y}$$

$$dS_1^*(t) = \exp(rT)\, S_1^*(t)\, \sigma d\omega^*(t)$$

Aplicando otra vez el lema de Itô, tenemos

$$S_1^*(t) = \exp(rT) \exp\left[\sigma\omega^*(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right]$$

que se puede comprobar fácilmente es una martingala con respecto a Q. La demostración de la unicidad de Q es un resultado técnico standard y se puede encontrar en Cox, J. y Huang, D. (1986); Harrison, J. M. y Kreps, M. (1979).

Para calcular el valor de X en cualquier momento t, sabemos que

$$X^*(t) = X(t) / S_0(t) = E^*[X(s) / S_0(s) \mid F_t] \qquad \text{para } t \leq s \qquad [2]$$

Para $s = T$

$$X(T) = g(S_T) =$$

$$= g\left(\exp[r(T-t)]\, S_1(t) \exp\left([\sigma[\omega^*(T) - \omega^*(t)] - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right)\right)$$

y [2] se convierte en

$$\exp[r(T-t)]\, X(t) = E^*[X(T) \mid F_t]$$

Como $\omega^*(t)$ es un movimiento Browniano standard con respecto a Q, $\omega^*(T) - \omega^*(t)$ está Q-normalmente distribuido con media 0 y varianza T-t, y por tanto

$$X(t) = \exp[-r(T-t)]\, E^*[X(T) \mid F_t] = \exp[-r(T-t)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\exp[r(T-t)]\, S_1(t)\, e^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\, e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}}\, dy \qquad [3]$$

que da el valor del activo derivado en el momento t.

3.2. La «Trading Strategy»

Nuestra siguiente tarea es determinar la «trading strategy» que produce la cartera duplicante. Sabemos que

$$S_1(t) = \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\omega^*(t)\right]$$

y

$$dS_1(t) = rS_1(t)\,dt + S_1(t)\,\sigma dv^*(t)$$

El precio descontado de X es función de t y de S_t, pudiéndose escribir

$$X^*(t) = f^*(t,S_1(t)) = X(t)\exp[r(T-t)] = f(t,S_1(t))\exp[r(T-t)] \qquad [4]$$

Aplicando otra vez el lema de Itô (es fácil comprobar que f es suficientemente diferenciable para que el lema pueda utilizarse), obtenemos

$$f^*(t,S_1(t)) = f^*(0,S_1(0)) +$$

$$+\int_0^t \exp[r(T-t)]\left[\frac{1}{2}f_{ss}S_1^2\sigma^2 + rS_1f_s - rf + f_t\right]ds +$$

$$+\int_0^t \exp[r(T-t)]\,f_S S_1\sigma d\omega^* \qquad [5]$$

Para que f^* sea una martingala con respecto a Q, el término en dt tiene que ser 0, y por tanto f ha de ser la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2}f_{SS}S_1^2\sigma^2 + rS_1f_S - rf + f_t = 0 \qquad [6]$$

con las condiciones de contorno $f(T, S_T) = g(S_T)$
que es la ecuación diferencial fundamental que satisface el valor de los activos derivados.

La condición de autofinanciación [1] en el sistema descontando los precios puede escribirse como

$$V^*(t) = \frac{V(t)}{S_0(t)} = \Phi_0(0) + \Phi_1(0)S_1^*(0) + \int_0^t \Phi_1(s)\,dS_1^*(s)$$

La primera integral de [1] aquí desaparece porque $dS_0^*(s) = 0$: las ganancias o pérdidas de capital descontadas del activo sin riesgo son cero.

De [4] y [5] obtenemos que

$$X^*(t) = \frac{X(t)}{S_0(t)} =$$

$$f(t,S_1(t)) = f(0,S_1(0)) + \int_0^t \exp[r(T-t)]f_S S_1\sigma d\omega^* =$$

$$f(0,S_1(0)) + \int_0^t \exp(rT)\,f_S dS_1^*(s)$$

y concluimos que

$$\Phi_1(t) = \exp(rT) f_S(t, S_1(t))$$

La posición en el activo sin riesgo tiene que ser el valor total de la cartera menos el valor del activo con riesgo:

$$\Phi_0(t) = f(t, S_t) - \exp(rT)\, S_1(t) f_S(t, S_1(t))$$

3.3. Un ejemplo particular

Nuestro último propósito es utilizar esta teoría para obtener la fórmula de Black-Scholes para el valor de una opción compradora sobre un activo principal. Esto no es otra cosa que la fórmula [2] para $g(x) = \max(x\text{-}k, 0)$, donde k es el precio de ejercicio de la opción:

$$X(t) = \exp\left[-r(T-t)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \max[\exp[r(T-t)\, S_1(t)\, e^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - k]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy$$

Sea

$$y^* = \frac{\log \dfrac{k}{\exp[r(T-t)]\, S_1(t)} + \dfrac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma}$$

$$d_1 = \frac{-y^* + (T-t)\,\sigma}{\sqrt{T-t}} = \frac{\log \dfrac{\exp[r(T-t)]\, S_1(t)}{k} + \dfrac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{-y^*}{\sqrt{T-t}} = \frac{\log \dfrac{\exp[r(T-t)]\, S_1(t)}{k} - \dfrac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

entonces

$$X(t) = \exp\left[-r(T-t)\right] \int_{y^*}^{\infty} \left(\exp[r(T-t)]\, S_1(t)\, e^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - k\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy =$$

$$= S_1(t) \int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - k \exp[-r(T-t)] \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$= S_1(t)\, N(d_1) - k \exp[-r(T-t)]\, N(d_2)$$

donde $N(\cdot)$ es la función de distribución normal standard. En este caso la estrategia duplicante es mantener en cada instante $t\, N(d_1)$ unidades del activo S_1 y el resto del dinero $X(t) - N(d_1)\, S_1(t)$ invertido en el activo sin riesgo.

Referencias

Black, F. y Scholes, M. (1973): «The pricing of options and corporate liabilities», *Journal of Political Economy, núm. 81,* págs. 637-659.

Chung, K. L. (1974): *A Course in Probability Theory* (Second Edition), New York Academic Press.

Cox, J. y Huang, D. (1988): «Option Pricing Theory and its Applications», en *Frontiers of Financial Theory,* edited by G. Constantinides and S. Bhattacharya. Rowman and Littlefield. Totowa, New Jersey.

Cox, J. y Huang, D. (1986): «A Variational Problem Arising in Financial Economics», Sloan School of Management, working paper 1751-86, MIT.

Duffie, D. (1988): *Security Markets, Stochastic Models,* Academic Press.

Durret, R. (1984): *Brownian Motion and Martingales in Analysis,* Belmont, California, Wadsworth Publising Company.

Girsanov, I. (1960): «On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures», *Theory of Probability and its Aplications, núm. 5,* págs. 285-301.

Harrison, J. M. y Kreps, M. (1979): «Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets», *Journal of Economic Theory, núm. 20,* págs. 381-408.

Harrison, J. M. y Pliska, S. (1981): «Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading», *Stochastic Processes and Their Applications, núm. 11,* págs. 215-260.

Merton, R. C. (1977): «On the Pricing of Contigent Claims and the Modigliani-Miller Theorem», *Journal of Financial Economics, núm. 5,* págs. 241-249.

Abstract

Our purpose in this paper is to present the Harrison and Kreps martingale theory for valuation of derivative assets. After exposing in the first section the general framework of this methodology, we will develope in the second section the formula to valuate derivative assets when the stochastic process followed by the underlying asset is available, and the self-financing strategy that duplicates the derivative asset. The valuation of an european call option is given as a particular example of this methodology. The paper ends with a summary of the article.

Recepción del original, diciembre de 1990
Versión final, noviembre de 1991