

APLICACIÓN DE PROCESOS CON RAÍZ UNITARIA ESTOCÁSTICA A ÍNDICES BURSÁTILES

ROMÁN MÍNGUEZ SALIDO
EDUARDO MORALES MARTÍNEZ
Universidad San Pablo-CEU

En este trabajo se estudian los procesos de raíz unitaria estocástica (STUR) como una generalización de los procesos de raíz unitaria fija. Así, se repasan tanto sus principales características estadísticas, como los métodos de detección y contraste desarrollados para este tipo de procesos. Finalmente, se estudia la relevancia empírica de estos procesos en la modelización de los índices bursátiles de los principales mercados mundiales, realizando una comparación tanto de las varianzas condicionadas como de las predicciones de los rendimientos, obtenidas con procesos STUR, frente a otros procesos de la literatura financiera.

Palabras clave: STUR, predicción.

(JEL C22, C13)

1. Introducción

Los procesos integrados homogéneos¹ del tipo I(d) con parámetros fijos, descritos en Stock (1995), han estado detrás de la modelización de la mayor parte de las series económicas y financieras. En los últimos años se ha extendido el estudio de procesos no estacionarios más generales que engloban los procesos de raíz unitaria fija como caso particular. En este ámbito se sitúan los procesos de raíz unitaria estocástica, STUR, cuya caracterización principal es permitir la evolución de la raíz autorregresiva alrededor de un valor medio unitario. Esta mayor flexibilidad los hace ser muy atractivos para explicar el comportamiento de determinadas series en las que el supuesto de raíz unitaria fija

¹ Los autores agradecemos los comentarios realizados por dos evaluadores anónimos así como las sugerencias de Samuel Bentolila. Todos los errores presentes en el artículo son de nuestra exclusiva responsabilidad.

puede ser muy restrictivo. De hecho, las propiedades estocásticas y de largo plazo de los procesos STUR difieren sustancialmente de los no estacionarios de tipo homogéneo, tal como se muestra en McCabe, Martin y Tremayne (2003). El desarrollo de contrastes adecuados en Leybourne, McCabe y Tremayne (1996) y Leybourne, McCabe y Mills (1996) permite seleccionar, para cada serie, entre ambos tipos de procesos y, en el caso de la detección de procesos STUR, la aplicación del filtro de Kalman es un método adecuado para estimar el valor de la raíz unitaria estocástica durante el período muestral.

El artículo se estructura de la siguiente forma: en la Sección 2 se resumen las principales características estadísticas de los procesos STUR. En la Sección 3 se describen los contrastes de detección de este tipo de procesos. La Sección 4 incluye un estudio empírico consistente en la modelización de índices bursátiles mundiales con procesos STUR.

2. Características de procesos STUR

Los procesos con raíz unitaria estocástica constituyen un caso particular de procesos autorregresivos doblemente estocásticos, estudiados por Tjøstheim (1986), donde la propia raíz de la estructura autorregresiva viene regida, a su vez, por un proceso estocástico. Siguiendo a LMM (1996), un proceso STUR se puede expresar como:

$$\begin{aligned} y_t &= \rho_t y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \text{ i.i.d. } N(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \rho_t &= 1 + \delta_t \\ \delta_t &= \gamma \delta_{t-1} + \eta_t \quad \eta_t \text{ i.i.d. } N(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned} \tag{1}$$

donde los ruidos ε_t y η_t son independientes.

En este caso y_t es un proceso AR(1) cuyo parámetro ρ_t sigue otro proceso autorregresivo con media unitaria. Dependiendo del valor que tome ρ_t en cada momento del tiempo t , el proceso y_t será estacionario ($\rho_t < 1$), explosivo ($\rho_t > 1$) ó no estacionario homogéneo ($\rho_t = 1$). Este tipo de procesos abarcan la no estacionariedad homogénea (raíz unitaria fija) como un caso particular cuando $\sigma_\eta^2 = 0$ y $\delta_0 = 0$. Así, el valor del parámetro σ_η^2 da una medida de la magnitud de las oscilaciones del proceso ya que indica la volatilidad de la raíz unitaria que rige el proceso autorregresivo.

La parametrización de la raíz unitaria estocástica como un proceso autorregresivo permite que la evolución de δ_t en [1] pueda tener distintos grados de inercia según los valores del parámetro γ (valores

próximos a la unidad indicarán fuerte persistencia en la evolución de la raíz mientras que, por otro lado, valores próximos a cero indicarán que la raíz se comporta como un ruido blanco alrededor de la unidad sin dependencia del pasado).

Las propiedades del proceso dado en [1] han sido estudiadas por Granger y Swanson (1997), LMM (1996), LMT (1996), MMT (2003), Yoon (2003b) y Yoon (2004). Concretamente este proceso, aunque es no estacionario en covarianzas, tampoco es I(1) ni I(2) ya que no se transforma en estacionario al tomar ningún número entero de diferencias (salvo el caso en que $\sigma_\eta^2 = 0$ ya que entonces es un paseo aleatorio). Para comprobarlo supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\gamma = 0$, entonces la primera ecuación de [1] se puede expresar como:

$$\Delta y_t = \eta_t y_{t-1} + \epsilon_t \quad [2]$$

por lo que y_t no es I(0) ya que Δy_t depende de y_{t-1} y no tiene varianza marginal constante.

Además, desde la ecuación [2], se puede comprobar que el proceso STUR es, en realidad, un proceso de heterocedasticidad condicional donde, a diferencia de los modelos GARCH, la varianza condicional de Δy_t viene regida por el nivel retardado de la variable y_t :

$$Var(\Delta y_t / \Omega_{t-1}) = y_{t-1}^2 \sigma_\eta^2 + \sigma_\epsilon^2 \quad [3]$$

Como consecuencia, el proceso STUR es uno de los procesos de heterocedasticidad condicional no estacionaria descritos en Park (2002).

Aunque y_t no sea estacionario en covarianzas² se puede hallar su media y su varianza dada una condición inicial y_0 ; así, suponiendo $\gamma = 0$, la primera ecuación de la expresión [1] queda:

$$y_t = y_0 \left[\prod_{k=1}^t (1 + \eta_k) \right] + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{t-1} \left[\varepsilon_i \prod_{k=i+1}^t (1 + \eta_k) \right] \quad [4]$$

y, de aquí, se pueden obtener los siguientes momentos:

$$\begin{aligned} E[y_t] &= y_0 \\ Var[y_t] &= \sigma_\varepsilon^2 \left[\frac{(1 + \sigma_\eta^2)^t - 1}{\sigma_\eta^2} \right] \end{aligned} \quad [5]$$

² Sin embargo, como se demuestra en Yoon (2004), a pesar de no ser estacionario en covarianzas, los procesos STUR sí que son estrictamente estacionarios en el sentido de que su distribución de probabilidad es invariante ante traslaciones temporales.

La expresión [5] muestra que la varianza de un proceso STUR crece más rápido que la del paseo aleatorio y la de los procesos I(1).

3. Contrastes de detección de raíz unitaria estocástica

En LMM (1996) y LMT (1996) se desarrollan contrastes para diferenciar procesos con raíz unitaria fija (hipótesis nula) frente a procesos STUR (hipótesis alternativa). Esto es, se parte de la existencia de raíz unitaria en el proceso generador de datos y se intenta discriminar si esta raíz es fija o estocástica. Como es habitual en los contrastes de raíces unitarias, el modelo a estimar debe incluir algún tipo de tendencia determinista en su proceso generador de datos, por ello se extiende el modelo [1] anterior en la forma:

$$\begin{aligned} y_t - \lambda_t - \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} &= \rho_t \left[y_{t-1} - \lambda_{t-1} - \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i-1} \right] + \varepsilon_t \\ \rho_t &= 1 + \delta_t \\ \delta_t &= \gamma \delta_{t-1} + \eta_t \\ \varepsilon_t \text{ i.i.d. } N(0, \sigma_\varepsilon^2) &\quad \eta_t \text{ i.i.d. } N(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned} \tag{6}$$

donde λ_t hace referencia a la tendencia determinista representada por una función lineal en el tiempo ($\lambda_t = \alpha + \beta t$), para aquellas series con derivada creciente o decreciente, o bien mediante una constante ($\lambda_t = \alpha$) cuando la serie deambula sin una evolución creciente o decreciente a largo plazo³. Como es habitual, se exige que las raíces del polinomio $1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p = 0$ estén fuera del círculo unidad para que el autorregresivo sea estacionario.

El estadístico de contraste a considerar depende del grado de persistencia en la evolución de la raíz (valor de γ en la expresión [6]) y del tipo de tendencia determinista incluida en el proceso. Si $|\gamma| < 1$ entonces la evolución de la raíz unitaria estocástica es estacionaria y el estadístico de contraste viene dado por:

$$Z_i = T^{-\frac{3}{2}} \hat{\sigma}_{\epsilon_i}^{-2} \hat{\kappa}^{-1} \sum_{t=2}^T \hat{\omega}_{t-1}^2 (\hat{\epsilon}_{it}^2 - \hat{\sigma}_\epsilon^2) \quad i = 1, 2 \tag{7}$$

³En LMT (1996) y LMM (1996) se permite incluso la posible existencia de tendencias cuadráticas en el tiempo. Esto conlleva un aumento de potencia en los contrastes de detección de procesos STUR.

donde $\hat{\epsilon}_{it}$ son los residuos de las regresiones mínimo cuadráticas⁴:

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= \alpha + \beta t + \sum_{j=1}^p \phi_j \Delta y_{t-j} + \epsilon_t \quad i = 1 \\ \Delta y_t &= \alpha + \sum_{i=j}^p \phi_i \Delta y_{t-i} + \epsilon_t \quad i = 2\end{aligned}\quad [8]$$

$\hat{\omega}_{t-1} = \sum_{j=1}^{t-1} \hat{\epsilon}_j$ es la suma parcial acumulada de los residuos, mientras que $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{\sum_{t=p+2}^T \hat{\epsilon}_t^2}{T-(p+2)}$ representa la estimación consistente de σ_ϵ^2 (varianza de la ecuación de medida) y $\hat{\kappa}^2 = \frac{\sum_{t=p+2}^T (\hat{\epsilon}_t^2 - \hat{\sigma}_\epsilon^2)^2}{T-(p+2)}$ es una estimación de la varianza a largo plazo. Al sustituir en el estadístico los parámetros por estimaciones consistentes no cambia su distribución asintótica.

Si $\gamma = 1$ en [6], entonces la evolución de la raíz unitaria estocástica no es estacionaria y los contrastes descritos no tienen validez. En LMM (1996) se desarrolla un contraste para este caso límite cuyo estadístico viene dado por:

$$E_i = T^{-3} \hat{\sigma}_\epsilon^{-4} \sum_{j=2}^T \left(\left[\sum_{t=j}^T \hat{\epsilon}_t \hat{\omega}_{t-1} \right]^2 - \hat{\sigma}_\epsilon^2 \sum_{t=2}^T \hat{\omega}_{t-1}^2 \right) \quad i = 1, 2 \quad [9]$$

donde los residuos y estimadores tienen el mismo significado que anteriormente. Tanto la distribución asintótica de los estadísticos Z_i , como la de los estadísticos E_i , convergen a funcionales de puentes brownianos. Los valores críticos para comparar se pueden encontrar en LMT (1996), para Z_1 , Taylor y Van Dijk (2002), para Z_2 y LMM (1996) para E_1 y E_2 . En Mínguez (2001) se calculan superficies de respuesta válidas para cualquier tamaño muestral y todos los contrastes analizados.

En todos los casos la forma de proceder es similar: se compara aquél con el valor crítico correspondiente y, si el valor del estadístico es superior, se rechaza la hipótesis nula.

Una vez realizados los contrastes correspondientes, se pueden estimar por máxima verosimilitud los parámetros del proceso STUR dado en [6] aplicando el filtro de Kalman. Posteriormente, se pueden calcular

⁴En la primera regresión se incluye una tendencia lineal y en la segunda sólo una constante. Aunque β no sea significativo en $i = 1$, la inclusión de una tendencia mejora la potencia de los contrastes.

predicciones multietapa mediante simulación de Monte Carlo de la forma habitual en procesos no lineales.

4. Resultados empíricos

En este apartado se analiza si los procesos STUR son adecuados para representar el verdadero proceso generador de datos de 12 índices representativos de los principales mercados bursátiles⁵. Las series, de frecuencia diaria, están comprendidas entre el 3 de enero de 1994 y el 30 de junio de 2003, aunque no todas tienen la misma longitud⁶. Todos los rendimientos bursátiles muestran exceso de curtosis, lo cual es especialmente acusado en los mercados asiáticos, y, mayoritariamente, muestran asimetría negativa.

El primer paso consiste en comprobar la posible existencia de raíces unitarias estocásticas en los logaritmos de los índices, para lo cual se llevan a cabo los contrastes [7] y [9] estudiados anteriormente. El número de retardos (p) de la variable dependiente incluidos en las regresiones MCO dadas en [8] se elige a partir de la minimización de un criterio de información (AIC o BIC) con un máximo de 6 retardos. El Cuadro 1 resume los resultados de los contrastes.

Al elegir el AIC como criterio de selección, el número de retardos incluido en las regresiones es alto (de hecho en 6 casos se elige el número máximo de retardos) aunque se garantiza la no existencia de autocorrelación en los residuos. Al utilizar el BIC como criterio de selección las regresiones son más escuetas aunque, para algunos casos, hay cierta evidencia de autocorrelación en los residuos⁷. Sin embargo, las conclusiones de los contrastes son robustas frente a cualquiera de los dos criterios utilizados. Para los contrastes Z_1 y Z_2 existe evidencia, con un nivel de al menos el 10% de significación, de proceso STUR frente a la hipótesis nula de raíz unitaria fija para 7 de las 12 series consideradas. Sin embargo, no existe prácticamente evidencia del rechazo de la hipótesis nula en los contrastes E_1 y E_2 . Estos resultados pare-

⁵ En Yoon (2003a) se ilustra mediante una simulación cómo la mayor parte de los rasgos característicos de los rendimientos financieros pueden explicarse con procesos de raíz unitaria estocástica.

⁶ Las series originales, los resultados obtenidos y los programas utilizados están a disposición pública bajo requerimiento a cualquiera de los autores.

⁷ En LMT (1996) se muestra, mediante un estudio de simulación, que los contrastes STUR del tipo Z_i resultan menos afectados por la sobreparametrización que por la infraparametrización.

CUADRO 1
**Contrastes de raíz unitaria estocástica (H_0 : raíz unitaria fija frente a
 H_1 : raíz unitaria estocástica)**

ÍNDICES	Z ₁	E ₁	p	Q(6)	Z ₂	E ₂	Q(6)
IBEX35 (Madrid)	-0.942	-0.037	0	13.77 (0.03)	0.250*	-0.094	13.58 (0.03)
DAX30 (Fráncfort)	-0.867	-0.03	0	14.57 (0.02)	-0.821	-0.094	14.00 (0.03)
CAC40 (París)	-1.287	-0.064	0	17.33 (0.01)	-0.946	-0.094	17.08 (0.01)
FTSE100 (Londres)	-0.501	-0.007	0	34.72 (0.00)	-0.154	-0.094	33.96 (0.00)
NIKK225 (Tokio)	-0.092	0.054	0	15.29 (0.02)	-0.604	-0.094	15.07 (0.02)
KORCOM (Seúl)	0.898***	0.043	1	9.37 (0.15)	1.403***	-0.094	9.35 (0.15)
HANGSEN (Hong Kong)	0.167**	0.024	3	7.74 (0.26)	0.635**	-0.094	7.67 (0.26)
ISTA100 (Estambul)	-0.066	0.021	0	18.79 (0.00)	0.599**	-0.094	18.85 (0.00)
MILMIB30 (Milán)	-0.588	-0.002	0	17.71 (0.01)	-0.399	-0.094	17.75 (0.01)
BNKOK50 (Bangkok)	0.313***	0.081***	1	5.99 (0.42)	3.026***	-0.094	5.88 (0.44)
SHENZSEA (Shanghai)	0.574***	0.032	0	24.79 (0.00)	0.430**	-0.094	24.79 (0.00)
JOHAN40 (Johannesburgo)	0.485***	0.042	1	14.54 (0.02)	0.371**	-0.094	14.54 (0.02)

* Indica rechazo al 10%. ** Indica rechazo al 5%. *** Indica rechazo al 1%

Los contrastes Z_i y E_i se calculan a partir de los residuos de la regresión |8|, donde el número de retardos p se elige minimizando el BIC a partir de un número máximo de 6 retardos. También se ha probado la selección de retardos a partir de la minimización del AIC con resultados similares.

Si i = 1 se incluye tendencia lineal en la regresión, mientras que si i = 2 sólo se incluye un intercepto. En ambos casos, tanto para i = 1 como para i = 2, el valor de p seleccionado ha sido el mismo.

El valor del estadístico Q(6) de Ljung-Box contrasta, como H₀, la no existencia de autocorrelación en los 6 primeros retardos de la regresión correspondiente. El valor entre paréntesis es el p-valor del contraste.

cen confirmar que hay un número relativamente importante de índices bursátiles cuyo proceso generador de datos puede aproximarse mejor por procesos STUR que a través de los procesos con raíz unitaria fija, lo cual corrobora los resultados presentados en Newbold (2000), los cuales detectan 4 rechazos en un conjunto de 6 índices con una muestra temporal menor de la considerada aquí.

De los resultados de los contrastes se deduce que los procesos STUR que mejor representan a los índices son aquellos en los que la raíz unitaria estocástica sigue un proceso autorregresivo estacionario ($|\gamma| < 1$ en la expresión [1]) frente a los que la raíz unitaria estocástica viene regida por un paseo aleatorio ($\gamma = 1$ en la expresión [1]). Como consecuencia, el grado de persistencia de la raíz unitaria estocástica es relativamente bajo. Por otro lado, la mayor parte de los rechazos de la hipótesis nula se concentra en las bolsas asiáticas cuyo comportamiento ha sido más volátil durante el período muestral analizado. Este resultado parece lógico, puesto que un proceso con mayores oscilaciones en la raíz unitaria estocástica conllevará una mayor inestabilidad.

Para poder evaluar el ajuste de los procesos STUR, para todas las series analizadas, el siguiente paso es estimar por máxima verosimilitud los parámetros del proceso dado en [6] para cada serie. El cuadro 2 resume los resultados de la estimación de todos los parámetros del proceso. El orden del autorregresivo estacionario es el mismo que el elegido al minimizar el BIC⁸ en el contraste STUR correspondiente.

CUADRO 2

Resultados de estimación máximo verosímil de procesos STUR

ÍNDICES	$\hat{\sigma}_\eta$	$\hat{\sigma}_\epsilon$	$\hat{\gamma}$	LR	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	T	p	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\phi}_3$
IBEX35	2.28E-02 (1.54E-03)	1.20E-02 (2.99E-04)	0.07 (0.06)	123.66	7.84 (0.04)	7.10E-04 (3.35E-05)	2476	0			
DAX30	6.40E-03 (6.70E-04)	9.32E-03 (6.79E-04)	0.01 (0.03)	454.18	7.91 (0.24)	1.71E-03 (1.25E-04)	2476	0			
CAC40	7.75E-03 (7.75E-04)	1.00E-02 (3.17E-04)	0.04 (0.04)	293.93	7.74 (0.00)	1.26E-03 (9.73E-05)	2476	0			
FTSE100	3.39E-02 (1.80E-03)	8.77E-03 (2.12E-04)	0.05 (0.05)	305.54	8.00 (0.02)	3.57E-04 (1.57E-05)	2476	0			
NIKK225	1.15E-02 (1.17E-03)	1.30E-06 (3.41E-03)	-0.06 (0.02)	115.78	10.98 (0.13)	-7.22E-05 (2.58E-05)	2476	0			
KORCOM	5.52E-02 (3.99E-03)	1.67E-02 (3.65E-04)	0.10 (0.07)	297.68	6.55 (0.22)	-1.75E-04 (2.18E-05)	2475	1	0.05 (0.03)		
HANGSEN	8.97E-02 (5.56E-03)	1.28E-02 (2.16E-04)	-0.11 (0.06)	303.67	5.50 (0.27)	3.45E-04 (2.19E-05)	1451	3	0.16 (0.03)	0.08 (0.03)	0.15 (0.02)
ISTA100	1.12E-02 (2.26E-03)	2.98E-02 (7.52E-04)	0.07 (0.14)	20.50	5.37 (0.05)	1.28E-03 (1.79E-04)	2476	0			
MILMIB30	1.93E-02 (1.84E-03)	1.36E-02 (3.68E-04)	0.01 (0.10)	49.69	9.23 (0.08)	7.66E-04 (5.69E-05)	2271	0			
BNKOK50	2.62E-02 (2.03E-03)	1.13E-02 (7.64E-04)	0.17 (0.04)	417.44	5.11 (0.23)	-9.14E-04 (5.32E-05)	2053	1	-0.01 (0.05)		
SHENZSEA	9.87E-03 (5.40E-04)	2.55E-07 (2.72E-03)	0.02 (0.02)	734.59	8.86 (0.24)	-6.16E-04 (5.49E-05)	2476	0			
JOHAN40	7.13E-02 (4.27E-03)	1.91E-05 (5.64E-03)	0.12 (0.02)	248.99	2.40 (0.00)	1.11E-04 (8.18E-06)	1892	1	0.74 (0.00)		

Las estimaciones máximo verosímiles obtenidas corresponden a los parámetros del proceso STUR dado en [6]. Los valores debajo de las estimaciones corresponden a las desviaciones típicas estimadas a partir de la matriz de información evaluada en las estimaciones máximo verosímiles.

El número de retardos de la parte autorregresiva estacionaria corresponde al seleccionado en el proceso de contrastación STUR realizados con anterioridad. Las celdas vacías corresponden a valores nulos de los parámetros impuestos a priori.

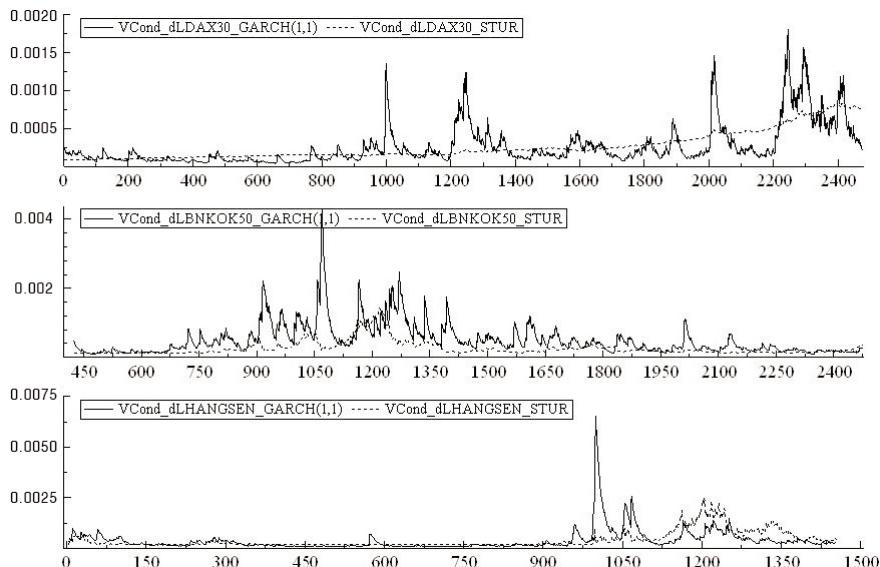
La columna LR indica el valor del contraste de la razón de verosimilitud cuya H_0 es $\sigma_\eta = 0$. El valor de la verosimilitud en el modelo restringido es el correspondiente a la regresión [8] incluyendo sólo intercepto, mientras que la verosimilitud no restringida se evalúa a partir de la estimación del proceso STUR.

⁸Se utiliza el BIC en lugar del AIC debido a que, dada la no linealidad del proceso, es preferible escoger el modelo más escueto en parámetros para facilitar el proceso de optimización al estimar. En cualquier caso los resultados de los contrastes eran los mismos para ambos criterios.

En el Cuadro 2 se puede comprobar que la desviación típica σ_η de la raíz unitaria estocástica resulta significativa en todos los casos. Por otro lado, al realizar un contraste de razón de verosimilitudes comparando el logaritmo de la verosimilitud evaluado tanto en el modelo restringido, con raíz unitaria fija, como en el no restringido, con raíz unitaria estocástica, los resultados, recogidos en la columna LR del Cuadro 2, indican que el STUR es siempre preferido. Aún así, hay una alta variabilidad entre los valores de σ_η significativamente distintos de cero, oscilando entre un mínimo de 0.00640, para el DAX30, y un máximo de 0.0897 para el HANGSENG. Los valores mayores de σ_η se encuentran en las series en las que se rechaza la hipótesis nula en los contrastes STUR (especialmente en los mercados asiáticos).

Para la mayor parte de las series, las estimaciones del parámetro γ son próximas a cero, indicando la gran erradicidad y escasa persistencia en el comportamiento de la raíces unitarias estocásticas. Este hecho es coherente con los resultados de los contrastes en los cuales sólo se detectaba cierta evidencia STUR en los contrastes Z_i .

GRÁFICO 1



Varianzas condicionadas de los rendimientos obtenidas a partir de un GARCH (1,1) y de un STUR aplicando la fórmula dada en [3]. Para comparar, se han elegido rendimientos bursátiles con un valor bajo de σ_η (DAX30), un valor medio (BNKOK50) y un valor alto (HANGSEN), respectivamente.

Una vez estimados los parámetros se pueden utilizar las ecuaciones del filtro de Kalman para obtener estimaciones alisadas de la raíz unitaria

estocástica a lo largo del período muestral. Por otro lado, una cuestión interesante es comparar la medición con procesos STUR de la varianza condicionada de los rendimientos bursátiles, obtenida mediante la aplicación de la ecuación [3], frente a la resultante al aplicar los modelos GARCH habituales en la literatura. Al comparar las varianzas obtenidas a partir de un GARCH(1,1) frente⁹ a las que se estiman con un proceso STUR las primeras muestran, generalmente, oscilaciones de mayor amplitud. Sin embargo, como era de esperar dado que el proceso STUR tiene una heterocedasticidad condicional no estacionaria, el grado de inercia de los shocks en la volatilidad es mayor que la correspondiente a modelos GARCH.

Por último, para comparar el comportamiento predictivo de los procesos de raíz unitaria estocástica en todas las series, tanto si existe evidencia STUR como si no la hay, se lleva a cabo un ejercicio de predicción cortando la muestra en las últimas 400 observaciones y confrontando las predicciones obtenidas por los procesos STUR, con horizonte entre 1 y 5 días, frente a otros habitualmente utilizados en la modelización de los rendimientos bursátiles (procesos AR puros lineales y paseos aleatorios (RW) con deriva¹⁰).

Si se consideran los índices donde se ha encontrado alguna evidencia STUR en los contrastes, hay una muy ligera superioridad, en términos del error cuadrático medio, de las predicciones del proceso STUR frente a los procesos AR y, en menor medida, al paseo aleatorio. Sin embargo, para las series en las que no se detecta evidencia STUR, la mejora predictiva desaparece.

⁹ A sugerencia de un evaluador, también se han comparado las varianzas condicionales del STUR frente a las calculadas con un proceso ARCH puro de orden alto (se han elegido 10 retardos) y de un IGARCH obteniendo las mismas conclusiones.

¹⁰ El número de retardos en los modelos AR se selecciona igual al orden de la parte autorregresiva estacionaria en los procesos STUR. Todos los cálculos se han realizado utilizando los paquetes SsfPack, ARFIMA y G@RCH 4.0 descritos en Koopman, Shephard y Doornik (1999), Doornik y Ooms (2001) y Laurent y Peters (2005) respectivamente. También se ha utilizado el paquete STUR creado por Mínguez (2001). Todo el software están implementado en lenguaje Ox desarrollado por Doornik (2002).

Referencias

- Doornik, J. A. (2002), *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox*, 3 ed., Timberlake Consultants Press, London.
- Doornik, J. A. y M. Ooms (2001): “A package for estimating,, forecasting and simulating arfima models: Arfima package 1.01 for Ox”, Discussion Paper, Econometric Institute, Erasmus University.
- Granger, W. J. C. y N. R. Swanson (1997): “An introduction to stochastic unit-root processes”, *Journal of Econometrics* 80, pp. 35-62.
- Koopman, S. J., N. Shephard y J. A. Doornik (1999): “Statistical algorithms for models in state space using SsfPack 2.2”, *The Econometrics Journal* 2, pp. 107-160.
- Laurent, S. y J. Peters (2005), *G@RCH 4.0, Estimating and Forecasting ARCH Models* Timberlake Consultants Press, London.
- Leybourne, S. J., B. P. McCabe y T. C. Mills (1996): “Randomized unit root processes for modelling and forecasting financial time series: Theory and applications”, *Journal of Forecasting* 15, pp. 253-270.
- Leybourne, S. J., B. P. M. McCabe y A. R. Tremayne (1996): “Can economic time series be differenced to stationarity?”, *Journal of Business and Economic Statistics* 14, pp. 435-446.
- McCabe, B. P. M., G. M. Martin y A. R. Tremayne (2003): “Persistence and Nonstationary Models”, Discussion Paper 16/2003, Department of Econometrics and Business Statistic, University of Monash.
- Mínguez, R. (2001): “Raíces unitarias estocásticas. Una aplicación a series financieras”, tesis doctoral, Universidad San Pablo-CEU.
- Park, J. Y. (2002): “Nonstationary nonlinear heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics* 110, pp. 383-415.
- Sollis, R., S. J. Laybourne y P. Newbold (2000): “Stochastic unit roots modeling of stock price indices”, *Applied Financial Economics* 10, pp. 311-315.
- Stock, J. H. (1995), *Handbook of econometrics* volumen IV, North-Holland, cap. Unit Roots, Structural Breaks and Trends, pp. 2739-2841.
- Taylor, A. M. R. y D. Van Dijk (2002): “Can tests for stochastic unit roots provide useful portmanteau tests for persistence?”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 64, pp. 381-397.
- Tjøstheim, D. (1986): “Some doubly stochastic time series models”, *Journal of Time Series Analysis* 7, pp. 51-72.
- Yoon, G. (2003a): “A simple model that generates stylized facts of returns”, Discussion Paper 2003-04, Department of Economics, UCSD.
- Yoon, G. (2003b): “Stochastic unit roots, long memory and I (1.5)”, Discussion Paper, Department of Economics and Related Studies, University of York.
- Yoon, G. (2004): “A note on some properties of STUR processes”, Discussion Paper, Department of Economics and Related Studies, University of York.

Abstract

In this paper stochastic unit root processes (STUR) are analysed as a generalization of fixed unit root processes. The main statistical characteristics of these processes are reviewed and methods of testing are presented. Finally, the empirical importance of these processes in the modeling of stock market indices is analysed, carrying out a comparison both of conditional variances and forecast returns, obtained with STUR processes, against other processes in the financial literature.

Keywords: STUR, forecasting.

*Recepción del original, diciembre de 2004
Versión final, septiembre de 2005*