Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XVI, n.º 2 (1992), págs. 281-297.

OBTENCION DE PLANES DE CULTIVO EFICIENTES EN EL SENTIDO DE MARKOWITZ EN LA PROVINCIA DE CORDOBA*

A. M. ALAEJOS GUTIERREZ
J. A. CAÑAS MADUEÑO
Universidad de Córdoba

Se realiza una aplicación del Modelo de Markowitz a la selección de planes de cultivo eficientes para seis cultivos de regadío en la zona regable del pantano del Bembézar, en la provincia de Córdoba. A las restricciones básicas del modelo de Markowitz se han incorporado las correspondientes a la submatriz de sucesión y frecuencia de los cultivos.

1. Introducción

La agricultura es una actividad económica compleja que se ve afectada por gran cantidad de variables entre las que podemos citar: el clima, el suelo, plagas y enfermedades, política de mercado, comercialización de productos..., etc. Esto hace que el agricultor, a la hora de tomar decisiones sobre qué, cómo y cuánto producir para alcanzar unos determinados objetivos, se mueva en un contexto de riesgo e incertidumbre, en donde, la mayoría de las veces, su criterio viene determinado por la intuición y sus experiencias anteriores, todo ello unido a una tradicional aversión al riesgo.

Los recientes avances en informática y en investigación operativa han permitido que el proceso tradicional e intuitivo de la planificación y toma de decisiones se pueda complementar por medio de la construcción de modelos matemáticos.

Los modelos de programación son una metodología empleada en el análisis de las distintas estrategias posibles para la toma de decisiones bajo contexto de riesgo. Estos modelos utilizan distintas técnicas de programación matemática para obtener un conjunto de planes eficientes y un plan óptimo para un nivel dado de riesgo. La programación cuadrática (modelo de Markowitz) y la programación lineal (MOTAD, Target-MOTAD y Media-DAP) son los modelos de programación más utilizados. Ambos emplean distintos estimadores del riesgo, Markowitz la varianza de los márgenes brutos de los cultivos y el

* Este trabajo es una parte de la investigación realizada por A. M. Alaejos y J. A. Cañas, la cual fue presentada por el primero como trabajo profesional de fin de carrera bajo la dirección del segundo.

Media-DAP la Desviación Absoluta Parcial (DAP) de dichos márgenes respecto a una meta fijada.

En este trabajo vamos a realizar una aplicación del modelo de programación cuadrática de Markowitz a la selección de planes de cultivo eficientes.

El enfoque media-varianza fue el modelo desarrollado por Markowitz (1952) y utilizado inicialmente para seleccionar carteras de valores bursátiles eficientes. Se basa en el supuesto de que un inversor siempre elegirá, para cada valor del rendimiento medio de los títulos (esperanza del rendimiento), aquella cartera (cartera eficiente o combinación de valores eficientes) que presente la varianza mínima en los rendimientos. En otras palabras, generar carteras eficientes en el sentido de Markowitz es hallar las carteras de varianza mínima para diferentes valores del rendimiento medio de los títulos.

Este modelo se aplica en agricultura para generar planes eficientes de cultivo. En este caso, el riesgo se mide por la varianza de los márgenes brutos de los cultivos que entren a formar parte del plan, mientras que la esperanza de rendimiento es la suma de los márgenes brutos medios de los n cultivos del plan.

Algunos trabajos que aplican a la resolución de problemas específicamente agrarios el modelo que hemos comentado son los siguientes.

En primer lugar, un trabajo de Romero (1976), donde el autor, mediante la aplicación del modelo de Markowitz, determina los planes eficientes para cuatro variedades de manzanos: Golden, Belleza de Roma, Starking y Stayman en la provincia de Lérida. Su función objetivo es minimizar la varianza de los rendimientos de las variedades, y como únicas restricciones considera las del rendimiento esperado (parametrizada), la obligación de cultivar toda la superficie y la no negatividad de las variables (implícita en el modelo). Una vez generada la curva eficiente, también obtiene la curva de seguridad de McFarquhar, determinando el plan óptimo de cultivo.

Otro trabajo en la misma línea es el realizado por Caballer (1979). Igual que en el caso anterior, se aplica el modelo de Markowitz con la misma función objetivo y restricciones, para determinar el calendario eficiente de recolección de la variedad Navel de naranjos en Valencia. Este mismo problema también se resuelve en un contexto de incertidumbre mediante la Teoría de Juegos.

Alonso (1977) también utiliza el mismo modelo para realizar una programación de cultivos en Castilla la Vieja. Selecciona cuatro cultivos de regadío: Trigo, Cebada, Patata y Remolacha; su función objetivo y restricciones son las mismas que las ya comentadas en el estudio de Carlos Romero, por lo que en esta ocasión no se incluyen restricciones agronómicas. Alonso también obtiene una programación para una situación de incertidumbre aplicando tres criterios de la teoría de juegos: Wald, Savage y Agrawal-Heady. Al final de su estudio compara las soluciones obtenidas para la situación de riesgo con las soluciones obtenidas en situación de incertidumbre.

Calatrava *et al.* (1981), mediante la programación lineal, analizan el empleo de la mano de obra en los regadíos del Valle Medio del Guadalquivir, en concreto en la zona de Posadas. En este trabajo, también plantean las matrices ganaderas.

Por último, dentro de la aplicación del modelo de Markowitz, citar los trabajos de Olmeda (1980), donde se determinan calendarios eficientes de almacenamiento de pera blanquilla en cámara frigorífica y en atmósfera controlada, y el de Rafaela Dios Palomares, Juan A. Cañas y Manuel Rodríguez Toledo (1980), en el que, apoyándose en dicho modelo, estudian la incidencia de los seguros de cosechas en la selección de planes eficientes.

2. Objetivos y metodología

Los objetivos que se persiguen con este trabajo son los siguientes:

1. Utilizar el modelo de Markowitz (Programación cuadrática) con objeto de obtener el conjunto de posibles planes eficientes para unos determinados cultivos. Nuestra aportación al modelo de Markowitz es la inclusión de las restricciones de tipo agronómico.

2. Aplicar este modelo a un caso real dentro de la agricultura cordobesa, en concreto a la zona de los riegos del Bembézar comprendida entre los Municipios de Posadas, Hornachuelos y Palma del Río, en total unas 6.814 Hectáreas de cultivos en regadío. Para configurar los planes se eligieron seis de los cultivos más representativos de la zona.

La metodología empleada se basa en el estudio mediante la utilización de series históricas que cubren un período de ocho años (1980-1987). Los datos utilizados proceden de dos fuentes: la primera, obtenidos de manera indirecta, consultando libros especializados y otros trabajos de investigación en este campo, así como estudios de organismos oficiales, etc. La segunda, más directa, consistente en las consultas y entrevistas con técnicos especializados, agentes de extensión agraria y agricultores de la zona.

Para la resolución de los modelos, hemos utilizado el programa de ordenador LINDO (Linear, Interactive, Discrete, Optimizer), disponible en la Unidad Docente: Economía de la Empresa Agraria de la E.T.S.I.A. de la Universidad de Córdoba.

De acuerdo con los comentarios expuestos en la Introducción, respecto al modelo de Markowitz, y persiguiendo los objetivos indicados, definiremos como plan eficiente de cultivo aquella combinación de cultivos que presenta una varianza de los márgenes brutos mínima para un determinado valor de la esperanza.

3. Planteamiento del modelo

El problema que se va a analizar consiste en determinar planes de cultivo eficientes en el sentido de Markowitz, a partir de las alternativas de cultivo seguidas en la zona de la provincia de Córdoba regada con el agua del pantano Bembézar.

A continuación exponemos el planteamiento del modelo de Markowitz adaptado a nuestro caso particular.

Las principales hipótesis de trabajo del modelo son:

Hipótesis H_1: El Agricultor tiene como principal objetivo la maximización del margen bruto medio de los cultivos que entran a formar parte de su alternativa.

Hipótesis H_2: El Agricultor asocia el riesgo con la variabilidad (varianza) de los márgenes brutos de los cultivos; su deseo es que dicha variabilidad sea la menor posible.

Hipótesis H_3: El Agricultor tiene una memoria limitada; esto quiere decir que a la hora de elaborar sus estrategias tendrá más presente los resultados de su actividad durante los últimos años. Por esta razón, hemos tomado series históricas que comprenden los ocho años más recientes de los que se dispone de datos.

Hipótesis H_4: Los márgenes brutos de los distintos cultivos son variables aleatorias que siguen distribuciones probabilísticas del tipo normal. Esta hipótesis puede limitar en la práctica la aplicación de este modelo. No obstante, la normalidad de los márgenes brutos es una hipótesis que se admite por lo general en la programación de actividades agrícolas bajo condiciones de riesgo (ver Cordonnier *et al.* 1973).

Hipótesis H_5: La sucesión de cultivos en la zona es la indicada por la matriz de reglas de sucesión.

Hipótesis H_6: Para los cultivos plurianuales se establecen las restricciones de frecuencia que se suelen aplicar en la zona.

Hipótesis H_7: La ocupación del terreno la vamos a considerar referida a 1 Ha.

Hipótesis H_8: La superficie objeto del estudio se supone uniforme desde el punto de vista agronómico y apta para todos los cultivos seleccionados en este trabajo, obteniéndose los mismos rendimientos, independientemente de las partes de la zona que se dediquen a ellos.

La nomenclatura utilizada en el desarrollo del modelo es la siguiente:

B_i = Margen bruto medio, [media aritmética de los márgenes brutos $(I_i - C_i)$ de los años comprendidos en la serie], del cultivo i (pts./Ha.).

X_i = Superficie dedicada al cultivo i (incógnita del problema) (Has.).

σ_{ii} = Varianza de los márgenes brutos obtenidos durante los distintos años de la serie para el cultivo i.

σ_{ij} = Covarianza de los márgenes brutos obtenidos durante los distintos años de la serie para los cultivos i, j.

La varianza del plan de cultivos viene dada por la expresión [1], que nos mide el riesgo en que incurre el agricultor al seleccionar un determinado plan, y que está formada por la suma de varianzas y covarianzas de los márgenes brutos ponderadas por las superficies dedicadas a cada cultivo.

La esperanza del plan es la representada por la ecuación [2], equivalente a expresar el margen bruto medio total (esperanza del plan) como la suma de los márgenes brutos medios de cada cultivo (B_i) multiplicados por sus correspondientes superficies (X_i).

Definidos los elementos del modelo, el problema consistirá en generar el conjunto de planes eficientes, que, como ya sabemos, serán aquellos que minimicen la varianza [1] para los distintos valores de la esperanza [2], sujeto todo esto a un conjunto de restricciones técnicas.

La formulación del modelo queda de la siguiente manera:

Función objetivo:

$$\text{Min } V_T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} X_i X_j \qquad [1]$$

Sujeta a:

$$\sum_{i=1}^{n} B_i X_i = B_0 \qquad [2]$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \qquad [3]$$

teniendo que cumplir las variables la condición de no negatividad.

La función objetivo [1] nos permite obtener cada plan de cultivos, que con una determinada esperanza de rendimiento presenta el mínimo riesgo (varianza).

La primera restricción [2], esperanza del plan, está parametrizada; variando el valor de B_0 aseguraremos al agricultor planes eficientes que alcancen determinados márgenes brutos medios y satisfagan sus expectativas económicas.

La restricción [3] nos indica que la superficie disponible es 1 Ha.

Además de estas restricciones, clásicas en el modelo original de Markowitz, se pueden incluir otras muchas. En este trabajo se han añadido restricciones características de la programación en agricultura, en concreto restricciones de sucesión y frecuencia de cultivos; aunque serán detalladas con mayor amplitud, su formulación será del siguiente tipo:

$$\sum_{i=1}^{n} (\pm 1) X_i \leq 0 \qquad [4]$$

$$X_i \leq \frac{m}{m+h} \cdot S (i = 1, 2, ..., n) \quad [5]$$

Todas las inecuaciones expresadas bajo la forma de la indicada en [4] son las restricciones correspondientes a la sucesión de cultivos; como es sabido, desde un punto de vista agronómico hay cultivos que no pueden ser precedidos por otros en una determinada alternativa. Esto da lugar a que existan una serie de reglas que tras su aplicación darán origen a distintas relaciones que nos determinarán las posibles sucesiones de cultivos.

La expresión [5] nos define a las restricciones de frecuencia para los cultivos plurianuales. Una regla agronómica bien conocida aconseja que un mismo cultivo no se repita todos los años en la misma parcela, pues de otro modo los rendimientos decaen. El significado de los índices que intervienen en la fórmula es el siguiente:

m = n.º de años que permanece el cultivo en la misma parcela.
h = n.º de años que debemos dejar descansar a la tierra.
X_i = Superficie dedicada al cultivo.
S = Superficie total cultivada.

Por último, decir que en el modelo se pueden incluir todas aquellas restricciones que afecten de manera directa a la actividad agraria que estemos analizando, p. ej. restricciones referentes a necesidades de mano de obra, de agua, de determinados *inputs,* aspectos institucionales y de mercado, decisiones de política agraria, etc.

A medida que incluyamos un mayor número de restricciones el modelo se hará más complejo, pero también ganaremos una mayor aproximación a la realidad objeto de nuestro estudio.

Para la resolución del modelo se puede ver Romero, C. (1980). La forma más cómoda de encontrar una solución es mediante el procedimiento matemático de los máximos y mínimos condicionados de Lagrange.

El procedimiento tradicional para la resolución del modelo de Markowitz mediante algoritmos de programación cuadrática presenta inconvenientes que le hacen poco operativo. Hoy en día, existen programas de ordenador que nos facilitan en gran medida los cálculos. En este trabajo hemos utilizado el programa LINDO (Linear, Interactive, Discrete, Optimizer), desarrollado para la resolución de modelos de programación lineal.

Al ser el modelo de Markowitz una programación cuadrática, previamente a la aplicación del LINDO tendremos que realizar una serie de transformaciones para convertirlo en un modelo lineal. Dichas transformaciones se basan en las condiciones de primer orden de Karus / Kuhn /Tucker / LaGrange[1].

Para explicar el procedimiento, partiremos del modelo completo con todas sus restricciones, expresiones [1] a [5]; a continuación tenemos que introducir

[1] Una explicación completa del modelo y sus aplicaciones se puede encontrar en: Scharge, L. (1981). Linear, Integer and Quadratic Programming with LINDO. Scientific Press.

los multiplicadores de Lagrange que afectan a las restricciones. Siendo éstos los siguientes:

ESP: multiplicador de Lagrange correspondiente a la restricción de la Esperanza del margen [2].

OCUP: multiplicador de Lagrange para la restricción de ocupación de superficie [3].

SUC_1, SUC_2, ... SUC_K: multiplicadores de Lagrange para las restricciones de sucesión [5], tantos como restricciones haya.

$FREC_1$, $FREC_2$, ... $FREC_P$: multiplicadores de Lagrange correspondientes a las restricciones de frecuencia, tantos como número de restricciones.

De la misma manera que se hace para la resolución del algoritmo tradicional, escribiremos la función de Lagrange; ésta se deriva respecto a las n variables X_i y respecto a todos los multiplicadores de Lagrange, obteniendo un sistema de $n + 2 + k + p$ ecuaciones.

A partir de las derivadas parciales obtenidas de la función de Lagrange, nuestro modelo de programación cuadrática quedará convertido en un modelo de programación lineal con la siguiente estructura:

Función Objetivo:

$$\text{Min } X_1 + X_2 + ... + X_n + \text{ESP} + \text{OCUP} + \text{SUC}_1 + \text{SUC}_2 + ...\text{SUC}_K + \text{FREC}_1 + \text{FREC}_2... + \text{FREC}_P \quad [6]$$

Sujeta a:

$$2\sigma_{11}X_1 + 2\sigma_{12}X_2 + ... + 2\sigma_{1n}X_n + \text{ESPB}_1 + \text{OCUP} \pm (1{,}0)\ \text{SUC}_i \pm (1{,}0)\ \text{FREC}_j > 0 \quad [7]$$

$$2\sigma_{21}X_1 + 2\sigma_{22}X_2 + ... + 2\sigma_{2n}X_n + \text{ESPB}_2 + \text{OCUP} \pm (1{,}0)\ \text{SUC}_i \pm (1{,}0)\ \text{FREC}_j > 0 \quad [8]$$

$$\vdots$$

$$2\sigma_{n1}X_1 + 2\sigma_{n2}X_2 + ... + 2\sigma_{nn}X_n + \text{ESPB}_n + \text{OCUP} \pm (1{,}0)\ \text{SUC}_i \pm (1{,}0)\ \text{FREC}_j > 0 \quad [9]$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_i X_i = B_0 \quad [10]$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \quad [11]$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\pm 1)\ X_i \leq 0 \quad [12]$$

$$X_i \leq \frac{m}{m+h} \cdot S; i = 1, 2, ... n \quad [13]$$

$$X_i \geq 0;\ i = 1, 2, ...n \quad [14]$$

La nueva función objetivo [6] estará compuesta por la suma de las variables X_i (cultivos) y de los multiplicadores de Lagrange.

Las ecuaciones [7], [8], ... [9], derivadas parciales de la función de Lagrange, no son restricciones propiamente dichas, su inclusión es necesaria para que el problema tenga una solución única.

Las verdaderas restricciones vienen dadas por: [10] esperanza del margen, [11] ocupación, [12] sucesión, [13] frecuencia y [14] no negatividad, todas conocidas.

El modelo transformado ya puede ser resuelto mediante el programa LINDO con la ayuda de un ordenador personal.

4. Aplicación del modelo a la zona regable del Bembézar

Para aplicar el modelo hemos seleccionado seis cultivos de los que ocupan una mayor superficie en la zona. Sin embargo, en la actualidad hay una gran diferencia de superficie entre el primer cultivo seleccionado con mayor ocupación (maíz, con un 49,9%) y el de menor ocupación (el tabaco, con el 3%).

Los cultivos que vamos a incluir en el análisis para determinar el plan óptimo en el sentido de Markowitz, según la importancia por la superficie cultivada en la zona, son: Maíz, Algodón, Girasol, Remolacha, Trigo y Tabaco.

Una vez aplicado el modelo descrito anteriormente a los datos correspondientes, se obtuvieron unos resultados, en los que la combinación de los cultivos que nos proporcionaban planes óptimos era tal que difería de la realidad por la proporción en que intervenían en la alternativa los diferentes cultivos.

Queremos indicar que los planes eficientes obtenidos no tienen por qué reflejar la realidad de las alternativas de la zona, debido a que el tratamiento que se hace de la información deja de considerar algunos condicionantes que alterarían los resultados. Estos hay que analizarlos en el contexto establecido por las hipótesis.

Los datos necesarios para aplicar el modelo son las esperanzas, varianzas y covarianzas de los márgenes brutos de los cultivos. Para obtener dichos márgenes se ha utilizado la expresión

$$MB_i = P_i \cdot R_i - Cv_i$$

donde MB_i = Margen bruto de un cultivo en el año i
P_i = precio percibido por el agricultor del cultivo en el año i
R_i = rendimiento obtenido por el cultivo en el año i
Cv_i = coste variable del cultivo en el año i

Los costes variables que vamos a considerar los obtenemos para la zona objeto de estudio estableciendo unas prácticas de cultivo comunes para dicha zona, en función de las consultas realizadas a los agricultores y a los técnicos que desarrollan su actividad en esta comarca.

En el Cuadro 1 se incorporan los márgenes brutos calculados para cada cultivo.

Para aplicar el modelo hemos deflacionado los valores de los márgenes, para convertirlos en unidades monetarias constantes. Hemos tomado el Indice de Precios al Consumo para deflacionar la serie tomando como año base el 1987.

Los valores deflacionados se incluyen en el Cuadro 2.

CUADRO 1
Márgenes Brutos de los cultivos (pts./Ha)

	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
Trigo (X_1)	35285	31235	38049	41144	56268	63253	70676	70028
Maíz (X_2)	33181	38790	49751	78322	79353	72824	97196	93340
Remolacha (X_3) .	37139	40071	38359	82244	94813	72933	56100	77461
Algodón (X_4)	35316	36917	36388	60410	97666	103295	136493	155353
Girasol (X_5)	22445	56160	44619	59906	53712	54733	94409	36414
Tabaco (X_6)	69757	53982	132097	125519	142995	201922	267543	366000

Fuente: Elaboración propia.

CUADRO 2
Márgenes Brutos de los cultivos deflactados respecto a 1987 (pts./Ha)

	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
Trigo (X_1)	71296	55072	58661	56529	69485	71772	74408	70028
Maíz (X_2)	60773	68392	76703	107609	97993	82632	102329	93340
Remolacha (X_3) .	75042	70650	59139	110250	117084	82756	59062	77461
Algodón (X_4)	71359	65090	56100	82999	120608	117207	143701	155353
Girasol (X_5)	45352	99018	68790	82307	66329	62105	99395	36414
Tabaco (X_6)	140949	95178	203658	172455	176584	229118	281672	366000

Fuente: Elaboración propia.

Los modelos se aplican a 1 Ha. ideal de regadío, donde hipotéticamente se pueden dar todos los cultivos considerados.

Las variables empleadas en la formulación son las siguientes:

X_1: Superficie de la Ha. que se dedicará a Trigo.
X_2: Superficie de la Ha. que se dedicará a Maíz.

X_3: Superficie de la Ha. que se dedicará a Remolacha.
X_4: Superficie de la Ha. que se dedicará a Algodón.
X_5: Superficie de la Ha. que se dedicará a Girasol.
X_6: Superficie de la Ha. que se dedicará a Tabaco.

ESP: Multiplicador de Lagrange correspondiente a la restricción del margen bruto medio esperado.

OCUP: Multiplicador de Lagrange correspondiente a la restricción de ocupación total de la superficie.

SUC_1, SUC_2, ... SUC_j: Multiplicadores de Lagrange correspondientes a las restricciones de sucesión de cultivos.

Definidas las variables, lo primero que calculamos es la matriz de varianzas-covarianzas correspondiente a los márgenes brutos. Partiendo de dichos márgenes (Cuadro n.º 2) y mediante un sencillo programa de informática, se obtiene la siguiente matriz de varianzas-covarianzas (Cuadro 3).

Una vez obtenida la matriz de varianzas-covarianzas, hay que plantear las restricciones de sucesión y frecuencia de cultivos[2].

CUADRO 3
Matriz de Varianzas-Covarianzas

	$\sigma_{j,1}$	$\sigma_{j,2}$	$\sigma_{j,3}$	$\sigma_{j,4}$	$\sigma_{j,5}$	$\sigma_{j,6}$	E
$\sigma_{1,i}$	5,292	1,397	−1,219	18,45	−6,273	31,44	65906,47
$\sigma_{2,i}$	1,397	24,69	15,12	33,55	7,552	60,81	86221,34
$\sigma_{3,i}$	−1,219	15,12	40,92	7,603	−5,491	−33,13	81430,5
$\sigma_{4,i}$	18,45	33,55	7,603	124,1	−15,61	229,2	101552,2
$\sigma_{5,i}$	−6,273	7,552	−5,491	−15,61	45,88	−65,57	69963,65
$\sigma_{6,i}$	31,44	60,81	−33,13	229,2	−65,57	629,1	208201,7
E	65906,47	86221,34	81430,5	101552,2	69963,65	208201,7	

Donde: σ_{ij}
$i = j \Rightarrow$ varianza del margen bruto del cultivo i
$i \neq j \Rightarrow$ covarianza de los márgenes brutos de los cultivos i y j

El principio en el que se basan estas restricciones consiste en establecer unas ecuaciones que reflejen el hecho de que la superficie dedicada a ciertos cultivos debe ser inferior, o en el límite igual, a la superficie dedicada a otros cultivos, que serían sus precedentes posibles.

El procedimiento seguido para obtener dichas ecuaciones es el siguiente:

[2] Una explicación detallada de este tipo de restricciones lo podemos encontrar en: P. Cordonnier *et al.* (1973). *Economía de la Empresa Agraria,* Ed. Mundi-Prensa.

Primero hay que elaborar el cuadro de reglas de sucesión; para esto tendremos en cuenta las características agronómicas de los cultivos y las prácticas culturales que se realizan en la zona.

La matriz de sucesión es una tabla de doble entrada donde las filas son los posibles cultivos precedentes y las columnas sus siguientes, o viceversa.

Agronómicamente, es desaconsejable que un cultivo se suceda a sí mismo, ya que a la larga se pueden producir rendimientos decrecientes debido a problemas tales como: aparición de plagas, malas hierbas, agotamiento del suelo, etc. Sin embargo, hoy en día, con la aparición de desinfectantes del suelo y herbicidas de pre y post-emergencia, la mayoría de los agricultores suelen repetir los cultivos, no siendo los de nuestra zona una excepción.

Al querer reflejar, en la mayor medida posible la realidad, hemos dado gran importancia a las prácticas seguidas por los agricultores, aunque desde el punto de vista científico no fuera del todo lo correcto y deseable. No quiere esto decir que se hayan olvidado determinadas incompatibilidades que impiden que algunos cultivos sean precedentes de otros o de ellos mismos.

Teniendo en cuenta lo indicado anteriormente, formamos la matriz de sucesión del Cuadro 4. Siguiendo las reglas de sucesión se obtienen las restricciones correspondientes, las cuales, junto con las de ocupación del terreno y las que incorporan las varianzas y covarianzas se expresan en el modelo completo del Cuadro 5.

CUADRO 4
Matriz de sucesión de cultivos

Precedentes / Siguientes	Trigo (X_1)	Maíz (X_2)	Remolacha (X_3)	Algodón (X_4)	Girasol (X_5)	Tabaco (X_6)
Trigo (X_1)	—	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Maíz (X_2)	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Remolacha (X_3) .	Sí	Sí	—	—	Sí	Sí
Algodón (X_4) .	Sí	Sí	—	Sí	Sí	Sí
Girasol (X_5)	Sí	Sí	Sí	Sí	—	Sí
Tabaco (X_6)	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	—

La matriz es simétrica respecto a la diagonal principal, al ser $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Tanto las varianzas como las covarianzas vendrán multiplicadas por 10^7. La última fila y columna de la matriz son los márgenes brutos medios de los cultivos (Esperanzas).

Los multiplicadores de Lagrange que vamos a utilizar son:

ESP: Correspondiente a la restricción del margen bruto medio esperado.

CUADRO 5
Formulación del modelo de Markowitz

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	ESP	OCUP	SUC_1	SUC_2	SUC_3	SUC_4	
Función Objetivo: MIN		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
Sujeto a:														
	2)	105,84	27,94	−63,36	369	−125,46	628,8	−65,906	1	−1	−1	−1	1	≥ 0
	3)	27,94	493,8	284,2	671	151,04	1216,2	−86,221	1	−1	−1	−1	−1	≥ 0
	4)	−63,36	284,2	334,4	153,46	332,6	257,2	−60,376	1	1	−1	−1	−1	≥ 0
	5)	369	671	153,46	2482	−312,2	4584	−101,552			−1	−1	−1	≥ 0
	6)	−125,46	151,04	332,6	−312,2	917,6	−1311,4	−69,993		−1	1	−1	−1	≥ 0
	7)	628,8	1216,2	257,2	4584	−1311,4	12582	−208,201		−1	−1	1	−1	≥ 0
	8)	65,906	86,221	60,376	101,552	69,963	208,201							$\geq K$
	9)	1	1	1	1	1	1							$= 1$
	10)	−1	−1	1		−1	−1							≤ 0
	11)	−1	−1	−1	−1	1	−1							≤ 0
	12)	−1	−1	−1	−1	−1	1							≤ 0
	13)	1	−1	−1	−1	−1	−1							≤ 0

OCUP: Correspondiente a la restricción de ocupación.
SUC_1, SUC_2, SUC_3, SUC_4: Correspondientes a las restricciones de sucesión de cultivos.

Respecto a las ecuaciones:

— De la 2 a la 7 son las derivadas parciales de la función de Lagrange.

— La 8 es la restricción correspondiente a la esperanza del margen bruto medio. Dándole distintos valores al parámetro K, generaremos el conjunto de planes eficientes.

— La ecuación 9 es la restricción de ocupación del terreno (como ya sabemos, la superficie disponible es 1 Ha. ideal donde se pueden dar todos los cultivos considerados).

Las últimas ecuaciones 10 a 13, ambas inclusive, representan las reglas de sucesión de cultivos, las cuales se obtienen a partir de la matriz de sucesión indicada en el Cuadro 4.

5. Resultados

Una vez resuelto el modelo, mediante la aplicación del programa LINDO, obtenemos los resultados que se recogen en el Cuadro 6.

A continuación vamos a exponer algunos comentarios sobre el cuadro de resultados.

— El primer intervalo considerado va desde las 70.000 pts./Ha. ($37,77.10^6$)[3] a las 95.000 ptas./Ha. ($144,66.10^6$); en él intervienen los siguientes cultivos: Trigo (X_1), que empieza con una participación del 50% para ir disminuyendo y desaparecer al final; Remolacha (X_3), Girasol (X_5) y Tabaco (X_6), todos ellos incrementando su participación dentro del intervalo.

— Desde las 100.000 pts./Ha. ($189,78.10^6$) hasta las 145.000 pts./Ha. ($1530,51.10^6$) continúan la Remolacha (X_3), que alcanza su máxima participación del 49,08% al final del intervalo; el Girasol (X_5), que deja de aparecer cuando se alcanzan las 140.000 pts./Ha., y el Tabaco (X_6) que se estabiliza en el 50 % para las 145.000 pts./Ha. También se incorpora el Algodón (X_4).

— El último intervalo comienza en las 145.000 pts./Ha. ($1649,38.10^6$) y termina en el valor del máximo margen bruto medio 154.877 pts./Ha. ($3029,1.10^6$). Los cultivos resultantes son: la Remolacha (X_3), que comienza a disminuir hasta dejar de participar en los planes, una vez alcanzadas las 154.500 pts./Ha.; el Algodón (X_4) y el Tabaco (X_6), que serán los dos únicos cultivos que intervengan en el plan correspondiente al máximo margen bruto medio, cada uno de ellos con un 50% de la superficie total disponible.

[3] Entre paréntesis figuran las varianzas correspondientes a las esperanzas de cada margen bruto medio.

CUADRO 6
Soluciones del modelo

Esperanzas 10^3 pts./Ha.	Varianzas (10^6)	Esp.- $\sqrt{Var}$ (10^3)	Trigo (X_1)	Maíz (X_2)	Remolacha (X_3)	Algodón (X_4)	Girasol (X_5)	Tabaco (X_6)
70	37,77	63,85	0,5	—	0,2169	—	0,2599	0,0232
75	38,56	68,79	0,5	—	0,2151	—	0,2516	0,0333
80	53,09	72,71	0,4414	—	0,2374	—	0,2553	0,0659
85	76,48	76,25	0,3248	—	0,2886	—	0,2922	0,0944
90	107,	79,65	0,2082	—	0,3390	—	0,3291	0,1228
95	144,66	82,97	0,0915	—	0,3912	—	0,3659	0,1514
100	189,78	86,22	—	—	0,4299	—	0,3885	0,1816
105	251,64	89,14	—	—	0,4230	—	0,3586	0,2184
110	334,51	91,71	—	—	0,4162	—	0,3287	0,2551
115	438,38	94,06	—	—	0,4094	—	0,2988	0,2918
120	563,26	96,27	—	—	0,4025	—	0,2689	0,3286
125	709,15	98,37	—	—	0,3957	—	0,2390	0,3653
130	876,05	100,4	—	—	0,3888	—	0,2099	0,4020
135	1063,96	102,38	—	—	0,3819	—	0,1793	0,4388
139,86	1266,84	104,27	—	—	0,3753	—	0,1502	0,4745
140	1272,87	104,32	—	—	0,3751	—	0,1494	0,4755
145	1530,51	105,88	—	—	0,4908	0,0092	—	0,5
146	1649,38	105,39	—	—	0,4411	0,0589	—	0,5
147	1775,66	104,86	—	—	0,3914	0,1086	—	0,5
148	1909,34	104,3	—	—	0,3417	0,1583	—	0,5
149	2050,42	103,72	—	—	0,2921	0,2079	—	0,5
150	2198,90	103,10	—	—	0,2424	0,2576	—	0,5
151	2354,78	102,47	—	—	0,1927	0,3073	—	0,5
152	2518,06	101,82	—	—	0,1430	0,3570	—	0,5
153	2688,74	101,15	—	—	0,0933	0,4067	—	0,5
154	2866,82	100,46	—	—	0,0436	0,4564	—	0,5
154,5	2958,64	100,11	—	—	0,0187	0,4813	—	0,5
154,877	3029,1	99,84	—	—	—	0,5	—	0,5

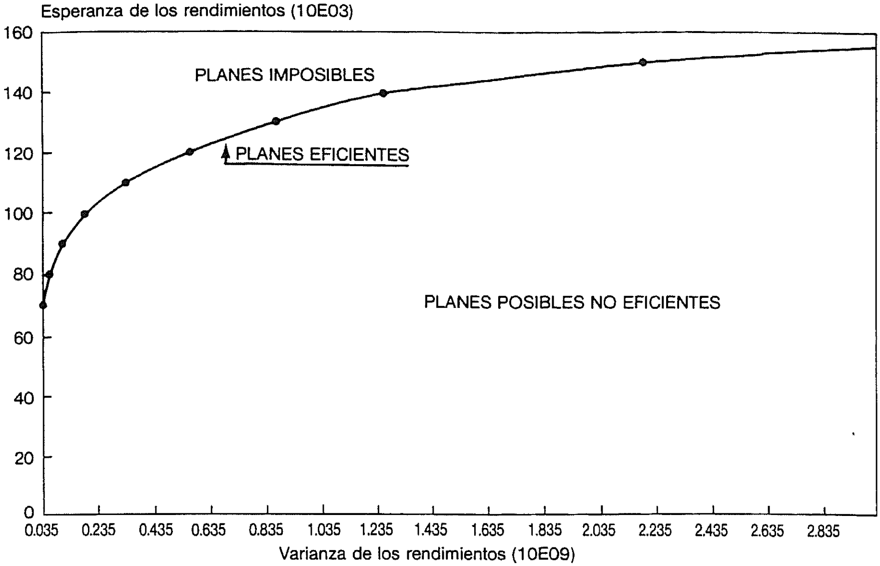

Gráfico 1
Planes de cultivos

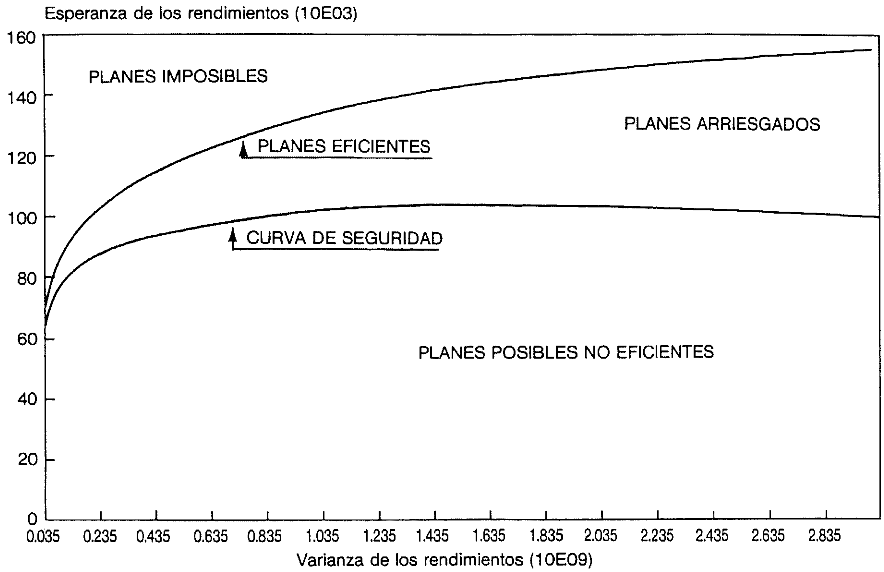

Gráfico 2
Planes de cultivos

En el Gráfico 1, representamos la curva de planes eficientes, que nos separa al semiplano de los planes imposibles del semiplano de los planos posibles eficientes.

Si aplicamos el procedimiento de McFarquhar para determinar el plan óptimo de entre todos los planes eficientes, y fijamos la probabilidad de ruina (α) en 0,16 y el Margen bruto medio crítico (E_{TO}), obtenemos la curva de seguridad que se representa en el Gráfico 2.

En este caso, la recta E_{TO} = 130.000 no nos corta a la curva de seguridad, esto quiere decir que el agricultor con la probabilidad (α = 0,16) no podrá nunca alcanzar el margen mínimo E_{TO}.

6. Conclusiones

Como conclusiones de la observación del Cuadro 5 podemos deducir las siguientes:

— El maíz no aparece como alternativa en ningún plan de cultivos, a pesar de que en la zona es el cultivo más representativo por la superficie que ocupa. Aunque esto se podría deber a las interrelaciones entre las varianzas de los cultivos, también puede que se deba a la necesidad del cultivo por su aplicación forrajera para alimento del ganado.

Esto supondría el que su cultivo se realizara independientemente de que la alternativa seguida no sea eficiente en el sentido de Markowitz.

— Los planes menos arriesgados proporcionan una esperanza de rendimiento más baja y están formados por los cultivos trigo, remolacha y girasol fundamentalmente y, en menor proporción, el tabaco.

— A medida que incrementamos la esperanza de rendimiento y por lo tanto la varianza, el trigo disminuye su participación, así como el girasol, mientras que la remolacha y el tabaco aumentan.

El trigo deja de intervenir a partir de un rendimiento de 95.000 ptas. por Ha.

En la zona objeto de estudio, la superficie ocupada por los cultivos que analizamos y el porcentaje que representa cada uno de ellos es el siguiente:

Maíz	10.036 Ha.	48,06 %
Algodón	4.478 Ha.	21,45 %
Girasol	2.699 Ha.	12,93 %
Remolacha	1.843 Ha.	8,83 %
Trigo	1.220 Ha.	5,84 %
Tabaco	604 Ha.	2,89 %
TOTAL	20.880 Ha.	100 %

Como principal diferencia de este plan de cultivos con los obtenidos mediante la aplicación del modelo, es que en éstos no aparece el maíz en ningún plan. La explicación de esta situación se debe a que hay otras razones no tenidas en cuenta en el modelo que hacen que el maíz se cultive en la zona (por ejemplo, la actividad ganadera).

En cuanto a los demás cultivos, el trigo y el tabaco se cultivan en porcentajes correspondientes a planes poco arriesgados, mientras que el algodón y la remolacha se cultivan en porcentajes que se corresponden con planes de mayor riesgo. El girasol se cultiva en la zona en unos porcentajes que se corresponden con una varianza y esperanza intermedia en la escala del Cuadro 6.

Referencias

Alonso, R. (1977): «Programación de Cultivos en Situaciones de Riesgo y de Incertidumbre en Castilla la Vieja», *Revista de Estudios Agrosociales, núm. 99*, págs. 157-188.

Caballer, V. (1979): «Calendarios Eficientes», *Revista de Economía y empresa, núms. 3-4,* págs. 9-20.

Calatrava, J. *et al.* (1981): «El Empleo de la Mano de Obra en los Regadíos del Valle Medio del Guadalquivir: el Caso de Posadas (Córdoba)», *Comunicaciones INIA, núm. 10.*

Cordonnier, P.; Carles, R. y Marsal, P. (1973): *Economía de la Empresa Agraria,* Mundi Prensa, Madrid.

Dios, R.; Cañas, J. A. y Rodríguez, M. (1980): «Incidencia de los Seguros de Cosechas en la Selección de Planes Eficientes. Modelos de Programación Cuadrática», *Revista de Economía Política, núm. 85,* págs. 197-211.

Markowitz, H. (1952): «Portfolio Selection», *Journal of Finance,* págs. 77-91.

Olmeda, M. (1980): «Duración Optima del Almacenamiento de Frutas», *Revista de Economía y Empresa, núm. 6.*

Romero, C. (1976): «Una Aplicación del Modelo de Markowitz a la Selección de Planes Optimos de Variedades de Manzanas en la Provincia de Lérida», *Revista de Estudios Agrosociales, núm. 97,* págs. 61-79.

Romero, C. (1980): *Modelos Económicos en la Empresa,* Ed. Deusto, Bilbao.

Abstract

In this paper an application of Markowitz model to the selection of E-V efficient cropping patterns in the lands irrigated by the Bembezar reservoir in Córdoba (Spain) is undertaken. The constraint set comprises the traditional E-V restraints plus the restraints corresponding to the sequence and frequency among crops.

Recepción del original, julio de 1991
Versión final, noviembre de 1991