Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XIII, n.º 3 (1989), págs. 439-451

DECISION BAJO RIESGO Y RELACIONES DE SIMILITUD: OBSERVACIONES SOBRE LA CONJETURA DE RUBINSTEIN

Xavier VILA*

Universidad Autónoma de Barcelona

En un reciente y novedoso trabajo de Rubinstein se postula que si los individuos tienen definidas unas «Relaciones de Similitud» sobre los espacios de premios y probabilidades y a la vez su procedimiento de selección entre loterías es, en algún sentido «natural», entonces las preferencias compatibles con estas similitudes y este procedimiento son «casi» únicas y representables por una función de utilidad sobre loterías de la forma $g(p) \cdot u(x)$. En esta forma funcional, son funciones asociadas a las similitudes sobre probabilidades y premios respectivamente. En este trabajo custionamos la afirmación de Rubinstein. Hallaremos una condición sobre las preferencias que es suficiente para que éstas sean compatibles con un par de similitudes y veremos como esta condición no es tan fuerte como Rubinstein indica. En efecto, probaremos la existencia de un subconjunto de espacio de loterías sobre el cual las preferencias no necesitan satisfacer ninguna condición.

1. Introducción

Desde la adopción de la Teoría de la Utilidad Esperada de Von Neumann-Morgenstern (1953) como modelo principal para explicar el comportamiento de los individuos en situaciones de riesgo, han sido muchos los resultados obtenidos e importantes las aplicaciones de estos resultados en la modelización de problemas en los que la incertidumbre desempeña un papel protagonista. Encontramos ejemplos clásicos en el análisis de la selección óptima de carteras (Markowitz, 1959), en las teorías del ahorro (Leland, 1968), en los análisis de los mercados de seguros (Rothschild-Stiglitz, 1976), en el análisis del mercado de trabajo (Lucas-Prescott, 1974) o en la economía de la información (Hirshleifer, 1971).

En este contexto, la Teoría de la Utilidad Esperada postula que si un individuo tiene definida sobre el conjunto de loterías (£) una relación de preferencias ($\succsim$) que satisface unos determinados axiomas, entonces existe una función de utilidad que representa estas preferencias con la propiedad de asignar a cada lotería el valor correspondiente a su «utilidad esperada».

* El presente artículo es un resumen del Trabajo de Investigación realizado para el Programa de Magister en Análisis Económico en el Departamento de Economía e Historia Económica de la Universidad Autónoma de Barcelona. Deseo, expresar mi más sincera gratitud hacia Ferrán Sancho por su tutoría en el trabajo antes citado y su ayuda en la realización de este artículo. Agradezco asimismo a Joan Ramón Palau y a Josep Palet sus acertados comentarios y sugerencias. Naturalmente, cualquier posible error es responsabilidad exclusiva del autor.

La Teoría de la Elección bajo incertidumbre es en la actualidad un campo en activo desarrollo, principalmente desde la constatación de la existencia de evidencia empírica (Allais, 1953; Lichtenstein y Slovic, 1971; Grether y Plott, 1979, y Kahneman y Tversky, 1979) que ha resultado contradictoria con las hipótesis en las que se basa la Teoría de la Utilidad Esperada de Von Neumann-Morgenstern (1953). Ello ha conducido a diversos autores a postular especificaciones alternativas de las funciones de utilidad que, aún partiendo de principios similares a los de la función de utilidad esperada de VNM, fueran consistentes con algunas de estas evidencias (Karmarkar, 1978; Kahneman y Tversky, 1979; Machina, 1982; Quiggin, 1982; Chew, 1983; Fishburn, 1983, y Yaari, 1987). En estos enfoques alternativos se relajan, o en algunos casos se sustituyen por otros, algunos de los axiomas en los que se basa la Teoría de la Utilidad Esperada. En este sentido, y los trabajos de Holt (1986) y Karni y Safra (1987) refuerzan esta idea, se ha considerado que la violación del Axioma de Independencia (una de estas hipótesis en las que se basa la Teoría de la Utilidad Esperada) es el principal problema a estudiar y resolver. El trabajo del reciente premio Nobel Maurice Allais (1953) fue el primero en el que se presentaba evidencia empírica de la violación sistemática de este axioma. Esta evidencia es ampliamente conocida en la literatura con el nombre de Paradoja de Allais.

La exploración de las causas que pudieran explicar este comportamiento (violación del Axioma de Independencia) aparentemente «irracional» de los individuos resulta ser, en consecuencia, un problema teórico de importancia singular. En esta línea se enmarca la reciente aportación de Rubinstein (1988). En este trabajo, a diferencia de lo que ocurría con los otros enfoques alternativos antes mencionados, no se relajan ni modifican los axiomas de la Teoría de la Utilidad Esperada sino que se parte de la base que la Paradoja de Allais revela una cierta propiedad de los esquemas de decisión usados por los individuos para determinar la preferencia de una lotería sobre otra. Rubinstein formaliza este esquema basándose en el uso de Relaciones de Similitud[1] en los espacios de premios y probabilidades.

Una teoría así construida tendría un gran atractivo puesto que, como Rubinstein indica:

> *«Derivar los axiomas a partir del comportamiento natural de los individuos es una estrategia más prometedora para la construcción de una teoría descriptiva que el uso de axiomas artificiales»* (Rubinstein, 1988).

En este sentido, la idea fundamental es que un individuo, en el momento de escoger entre prospectos inciertos[2], considera como idénticas dos probabilidades (o premios) que aún siendo diferentes sean percibidas como «similares» según su propia relación de similitud. Detrás de esta visión está el hecho observado por los psicólogos que los individuos tienen, en general, una per-

[1] Fue Tversky (1977) el primero en relacionar el uso de Relaciones de Similitud con los esquemas de decisión de los individuos.

[2] Rubinstein considera loterías de la forma: $L = \{(x, p),(0,1-p)\}$ con $x < 1$.

cepción imperfecta o limitada de las probabilidades. Esta conceptualización se extiende también al espacio de premios al postular que dos premios diferentes pueden ser considerados como «iguales» si son similares. Consideremos el siguiente ejemplo con loterías L_1 y L_2 definidos por:

$$L_1 = \{(1.000.000, 0.8), (0, 0,2)\} \quad L_2 = \{(1.000.005, 0.5), (0, 0,5)\}$$

Parece natural pensar que un individuo racional preferirá la loteria L_1 a la lotería L_2 puesto que ambas ofrecen el «mismo» premio pero la primera lo hace con mayor probabilidad.

La introducción de estas relaciones de similitud sobre probabilidades y premios y la suposición que los individuos utilizan un cierto «esquema de decisión» basado en ellas, permite a Rubinstein conjeturar que las preferencias de un individuo sobre loterías que sean compatibles con este «esquema de decisión» han de ser «casi» únicas y representables por una función de utilidad del tipo $g(p) \cdot u(x)$ donde g y u son funciones asociadas a las relaciones de similitud existentes en los espacios de premios y probabilidades.

El principal objetivo de este trabajo es discutir la validez de esta conjetura. En la sección 2 se efectúa una presentación formal y detallada de la problemática discutida. En la sección 3 se enuncian y demuestran los resultados ofreciéndose un ejemplo que resulta contradictorio con la idea de Rubinstein. En tal ejemplo se presentan unas preferencias que, aún siendo consistentes con el «esquema de decisión», no son representables por ninguna función de utilidad de la forma $g(p) \cdot u(x)$. Se concluye el trabajo con una breve sección de recapitulación de resultados y posibles líneas de avance en la investigación.

2. Decisión a partir de relaciones de similitud

2.1. *Conceptos básicos, definiciones y notación*

a) PREFERENCIAS SOBRE LOTERIAS:

Denotaremos por (x, p) la lotería que da el premio x con probabilidad p y cero con probabilidad $1 - p$, donde $0 \leqq x \leqq 1$. Por tanto, el conjunto $£ = (0,1) \times (0,1)$ es el conjunto de loterías.

Sea $\gtrsim$ una Relación de Preferencia definida sobre £. Denotaremos por $>$ a la preferencia estricta y por $\approx$ a la indiferencia. Supondremos que $\gtrsim$ satisface los siguientes axiomas:

[$P-1$] $\gtrsim$ es reflexiva y transitiva.

[$P-2$] $\gtrsim$ es monótona, esto es:

$$x_1 > x_2 \text{ y } p_1 > p_2 \Rightarrow (x_1, p_1) > (x_2, p_2)$$

[$P-3$] $\gtrsim$ es continua.

[$P-4$] $\forall x$ y $\forall p$, $(x,0) \approx (0,x) \approx (0,0)$

b) RELACIONES DE SIMILITUD:

Una relación binaria S sobre el conjunto $A = [0,1]$ es una Relación de Similitud o, sencillamente, una Similitud si verifica:

[S-1] S es reflexiva.

[S-2] S es simétrica.

[S-3] S es continua.

[S-4] S cumple la propiedad de inclusión:

$\forall a, b, c \in A$ tales que $a \leqq b \leqq c$: $aSc \Rightarrow aSb$ y bSc.

[S-5] S es no degenerada:

(i) $\forall a\ (0 < a < 1)\ \exists b, c\ (c < a < b)$ tales que bSa y cSa.

Para $a = 1$ existe un c como el indicado. Por tanto, el único elemento que puede no ser similar a ningún otro elemento en A es el cero.

(ii) $0 \not S 1$.

[S-6] Si aSb y existe $a' < a$ $(a' > a)$ tal que $a'Sb$ entonces existe $b' < b$ $(b' > b)$ tal que $a'Sb'$.

Supondremos que los individuos tienen unas similitudes S_p y S_x definidas sobre los espacios de probabilidades y premios respectivamente.

Ejemplo: La similitud λ-ratio es la relación definida por:

$$aSb \text{ si } 1/\lambda \leqq a/b \leqq \lambda \quad \text{donde} \quad \lambda > 1$$

Dada una similitud S denotaremos: $a^* = \text{Max}\ \{b \in [0,1] / bSa\}$ y $a_* = \text{Min}\ \{b \in [0,1] / bSa\}$.

Nótese que para toda similitud si $a \leqq 1_*$ *entonces* $(a^*)_* = a$ y si $a \geqq 0^*$ entonces $(a_*)^* = a$.

c) REPRESENTACION DE SIMILITUDES:

En Rubinstein (1988) se demuestra cómo toda similitud que cumpla los axiomas [S-1] a [S-6] es representable en el siguiente sentido: para todo $\lambda >$ existe una función H estrictamente creciente tal que:

$$aSb \Longleftrightarrow 1/\lambda \leqq H(a)/H(b) \leqq \lambda$$

2.2. *Esquema de decisión*

Supondremos que el proceso de decisión que sigue un individuo para determinar la preferencia entre dos loterías (x_1, p_1) y (x_2, p_2) pasa por comprobar la validez de las siguientes afirmaciones:

«x_1 es similar a x_2»
«p_1 es similar a p_2»

Si sólo una de las dos afirmaciones es cierta, entonces la variable que aparece en la afirmación que no lo es resulta determinante. Por ejemplo, si únicamente es cierta la primera afirmación, entonces las probabilidades resultan decisivas, es decir:

$$p_1 > p_2 \Rightarrow (x_1, p_1) > (x_2, p_2)$$

Si ninguna de las dos afirmaciones es cierta o ambas lo son, entonces el proceso de decisión es libre. Este esquema de decisión queda recogido, siguiendo la terminología de Rubinstein, en el denominado «procedimiento*» para la determinación de la preferencia entre dos loterías:

*Procedimiento**:*

Fase 1: Siempre que $x_1 > x_2$ y $p_1 > p_2$ entonces $(x_1, p_1) > (x_2, p_2)$.
Si este paso no resulta decisivo, se comprueba la fase 2.

Fase 2: (i) Siempre que $p_1 S_p p_2$, $x_1 \not{S}_x x_2$ y $x_1 > x_2$ tendremos que $(x_1, p_1) > (x_2, p_2)$.
(ii) Siempre que $x_1 S_x x_2$, $p_1 \not{S}_p p_2$ y $p_1 > p_2$ tendremos que $(x_1, p_1) > (x_2, p_2)$.

Si este paso tampoco resulta decisivo, entonces se pasa a la fase 3 en la que el procedimiento de elección no se especifica.

Nótese que este esquema de decisión permite una explicación de la Paradoja de Allais en el siguiente sentido, se le presenta a un individuo el siguiente problema

OPCION 1: Escoger entre

$L_1 = \{(1.000.000,1),(0,0)\}$ $L_2 = \{(5.000.000,0.1),(1.000.000,0.89),(0,0.01)\}$

OPCION 2: Escoger entre

$L_3 = \{(1.000.000,0.11),(0,0.89)\}$ $L_4 = \{(5.000.000,0.1),(0,0.9)\}$

En la situación descrita se puede demostrar si un individuo se comporta según postula la Teoría de la Utilidad Esperada y escoge L_1 (respectivamente L_2) en la primera opción, debería entonces preferir L_3 (respectivamente L_4) en la segunda opción. En caso contrario violaría el Axioma de Independencia. Allais encontró, sin embargo, que la mayoría de los individuos enfrentados a este experimento (entre ellos L. Savage) escogieron L_1 en la primera opción y L_4 en la segunda.

La explicación de este comportamiento aparentemente paradójico vendría entonces del hecho que un individuo podría perfectamente preferir la lotería L_1 en la primera opción por aversión al riesgo y la lotería L_1 en la segunda por el uso de relaciones de similitud si considerase que en ambas loterías (L_3 y L_4) las probabilidades de obtener premio (0.11 en un caso y 0.1 en el otro) son similares mientras que los premios (1.000.000 y 5.000.000) no lo son.

Siguiendo a Rubinstein denotaremos por C al conjunto de las ternas $(S_x, S_p, \succsim)$ tales que las preferencias $\succsim$ satisfaces [P-1] a [P-4] y son consistentes según el procedimiento* con las similitudes S_x y S_p que satisfacen [S-1] a [S-6].

Rubinstein sugiere que el hecho de que un individuo se comporte según el procedimiento* impone una restricción tan fuerte sobre el conjunto C que éste queda casi reducido a una única relación de preferencias que es representable por una función del tipo $g(p) \cdot u(x)$ donde g y u son funciones que representan, para algún λ, las similitudes sobre probabilidades y premios respectivamente.

«...Se discutirá cómo el procedimiento impone una restricción muy fuerte sobre el conjunto de preferencias consistentes con un par de similitudes. La principal conclusión de este trabajo es que si un individuo usa un procedimiento* y su elección es transitiva entonces, haga lo que haga en la fase 3, su relación de preferencias es 'casi' única y representable por una función de utilidad $g(p) \cdot u(x)$.»* (Rubinstein, 1988).

Los siguientes resultados, sin embargo, muestran cómo la condición que el procedimiento* impone sobre C no es tan fuerte como Rubinstein indica.

3. Resultados y contraejemplo

3.1. Resultados

Para la prueba de nuestro resultado resulta útil el siguiente Lema demostrado por Rubinstein en su trabajo.

Lema 1: Sean S_x y S_p' similitudes que satisfacen [S-1] a [S-6] y sean $\succsim$ preferencias que satisfacen [P-1] a [P-4]. Entonces:

$(S_x, S_p, \succsim) \in C \Rightarrow \nexists\ x > 0$ y $p > 0$ tales que $0 S_x x$ o $0 S_p p$

Demostración: Ver Rubinstein (1988).

Este Lema indica que para que existan unas preferencias compatibles con unas similitudes dadas es necesario que no exista ningún premio ni ninguna probabilidad que sean similares a cero. En la siguiente proposición supondremos que las similitudes son de éste tipo.

Proposición 1: Sean S_x y S_p similitudes que satisfacen [S-1] a [S-6] para las cuales $\nexists\ x > 0$ y $p > 0$ tales que $0 S_x x$ o $0 S_p p$ *y sean* $\succsim$ preferencias que satisfacen [P-1] a [P-4]. Entonces:

$\forall\ (x, p) \in £\ (x_*, p) \approx (x, p_*)$ y $\succsim$ es fuertemente monótona[3] $\Rightarrow (S_x, S_p, \succsim) \in C$

Demostración: Dadas dos loterías (x_1, p_1) y (x_2, p_2) se pueden considerar dos casos correspondientes a cada una de las fases del procedimiento*

[3] Unas preferencias son fuertemente monótonas si cumplen:

$\forall\ (x_1, p_1), (x_2, p_2)$ tales que al menos uno de los dos p_1 o p_2 es diferente de cero y al menos uno de los dos x_1 o x_2 es diferente de cero se cumple que si $x_1 \geqq x_2$ y $p_1 \geqq p_2$ con desigualdad estricta en al menos uno de los dos casos se tiene entonces que $(x_1, p_1) > (x_2, p_2)$.

— Caso 1: Supongamos que $x_1 > x_2$ y $p_1 > p_2$. Entonces, dado que las preferencias son monótonas tendremos que $(x_1, p_1) > (x_2, p_2)$.

— Caso 2.1: Supongamos ahora que $x_1 S_x x_2$, $p_1 \not S_p p_2$ y $p_1 > p_2$

Veremos primero que en este caso se ha de cumplir que $p_2 \leqq 1_*$. En efecto, supongamos que no es así, es decir, que $p_2 > 1_*$. Entonces, si $p_1 \not S_p p_2$ y $p_1 > p_2$ tendremos que, necesariamente, $p_1 > p_2^*$. Pero si suponemos que $p_2 > 1_*$ tendremos que $p_2^* = 1$, resultando que $p_1 > 1$, lo cual no puede ser.

Adicionalmente, si tenemos unas similitudes para las cuales $\nexists x > 0$ y $p > 0$ tales que $0 S_x x$ o $0 S_p p$, tendremos que $x_2^* > 0$.

En definitiva tendremos que:

si $x_1 S_x x_2$, entonces $x_1 \geqq x_2^* > 0$

si $p_1 \not S_p p_2$ y $p_1 > p_2$, entonces $p_1 > p_2^* > 0$

Aplicando la propiedad de monotonía fuerte quedará que $(x_1, p_1) > (x_2^*, p_2^*)$.

Pero si como hemos probado debe cumplirse que $p_2 \leqq 1_*$, entonces también se cumplirá que $(p_2^*)_* = p_2$.

Consideremos entonces la lotería (x_2, p_2^*). Por hipótesis $(x_{2*}, p_2^*) \approx (x_2, (p_2^*)_*)$. Pero como $(p_2^*)_* = p_2$ tendremos que $(x_{2*}, p_2^*) \approx (x_2, p_2)$. En definitiva, quedará que $(x_1, p_1) > (x_{2*}, p_2^*) \approx (x_2, p_2)$ y, finalmente, por transitividad resultará que $(x_1, p_1) > (x_2, p_2)$.

—Caso 2.2.: Sería necesario ahora demostrar que este resultado también se obtiene cuando $p_1 S_p p_2$, $x_1 \not S_x x_2$ y $x_1 > x_2$. En este caso la demostración es idéntica a la efectuada para el Caso 2.1 y se reproduce *verbatim* sustituyendo x_1 por p_1 y x_2 por p_2.

Vemos, en consecuencia, que en cualquier caso las preferencias son consistentes con las similitudes según indica el procedimiento*. Por tanto, hemos demostrado que bajo estas hipótesis se cumple que $(S_x, S_p, \gtrsim) \in C$.

Proposición 2: Sean S_p y S_x similitudes que satisfacen [S-1] a [S-6]. Entonces: $\nexists\, Q$ $(£ \supset Q)$ tal que $\forall (x, p) \in Q$ $\nexists (x', p), (x, p') \in £$ tales que $(x, p) = (x'_*, p)$ o $(x, p) = (x, p'_*)$

Demostración: Definimos el conjunto:

$$Q = \{(x, p) \in £ \;/\; 1_* < x \text{ y } 1_* < p\}$$

Entonces, si $(x, p) \in Q$ tendremos que $x > 1_*$. Pero como por definición tenemos que $1_* = \text{Max}\,\{x \in [0,1] \,/\, x = x'_* \text{ para algún } x' \in [0,1]\}$, si $x > 1_*$ tendremos que $\nexists\, x'$ tal que $x'_* = x$. Por tanto, $\nexists (x', p)$ tal que $(x'_*, p) = (x, p)$.

Por un argumento similar aplicado al espacio de probabilidades resulta que $\nexists$ (x, p') tal que $(x, p'_*) = (x, p)$.

A efectos de interpretar el significado de estas proposiciones consideremos para cada lotería $L = (x, p) \in £$ las siguientes dos loterías (ver Gráfico 1):

$I_L = (x_*, p)$ a la que llamaremos «extremo por la izquierda» de la lotería L.

$D_L = (x, p_*)$ a la que llamaremos «extremo por debajo» de la lotería L.

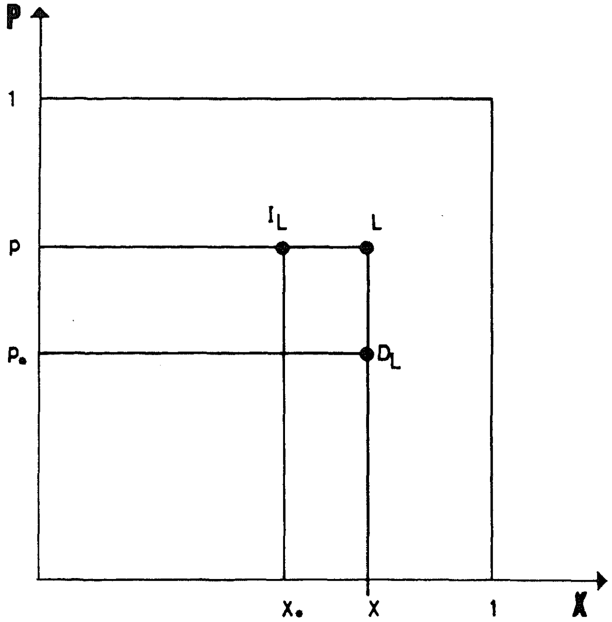

Gráfico 1

La proposición 1, entonces, nos dice que es suficiente que para cada lotería sus «extremos» por la izquierda y por debajo sean indiferentes entre sí para que las preferencias sean compatibles con el par de similitudes que el individuo tiene definidas. Por otro lado, la proposición 2 nos muestra que hay loterías que no son ni «extremo por la izquierda» ni «extremo por debajo» de ninguna lotería y, por tanto, quedan libres de esta condición suficiente. Esto nos permitirá construir un contraejemplo a la idea de Rubinstein.

3.2. *Contraejemplo*

En el siguiente contraejemplo se mostrará cómo pueden existir unas preferencias compatibles con el procedimiento* pero no representables por ninguna función de la forma $g(p) \cdot u(x)$. Para ello especificaremos unas preferencias que, para un subconjunto de loterías, estarán representadas por una función de utilidad de la forma $g(p) \cdot u(x)$. Para el subconjunto restante (que precisamente es al que se refiere la Proposición 2, es decir, el de loterías sobre las cuales las preferencias no necesitan satisfacer la condición suficiente de la

Proposición 1 para ser consistentes con el procedimiento*) la función de utilidad adoptará otra forma distinta. Esta función de utilidad se construye de tal forma que, aun tratándose de una función definida en dos tramos, cumple la condición de continuidad.

Supongamos, entonces, que las similitudes que el individuo tiene definidas sobre los espacios de probabilidad y premios son del tipo $\hat{\ }$ λ-ratio, esto es:

$$p_1 S_p p_2 \Longleftrightarrow 1/\lambda \leqq p_1/p_2 \leqq \lambda$$

$$x_1 S_x x_2 \Longleftrightarrow 1/\lambda \leqq x_1/x_2 \leqq \lambda$$

Claramente, las funciones $g(p) = p$ y $u(x) = x$ representan estas similitudes.

Consideremos las preferencias $\gtrsim$ representadas por la función de utilidad sobre loterías $U(p, x)$ donde:

$$U(p, x) = \begin{cases} U_1(p, x) & \text{si } p \cdot x \leqq 1/\lambda \\ \\ U_2(p, x) & \text{si } p \cdot x \leqq 1/\lambda \end{cases}$$

con: $U_1(p, x) = p \cdot x$ y $U_2(p, x) = \dfrac{x(p + 1)}{\lambda x + 1}$ (ver Gráfico 2)

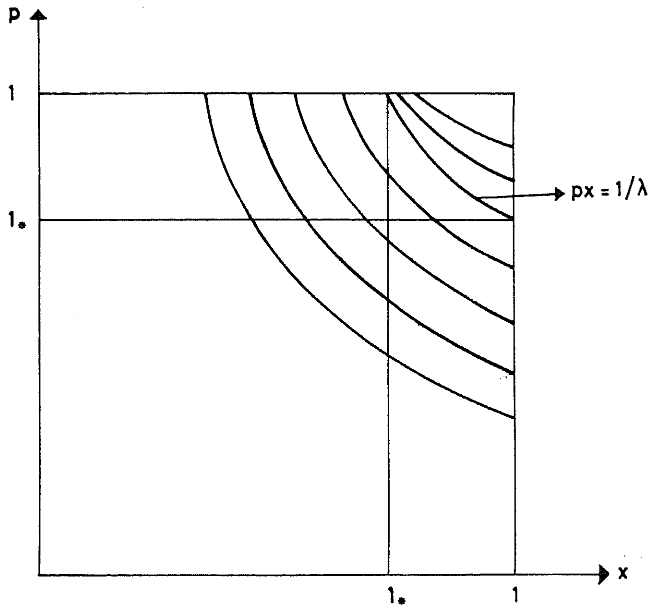

Gráfico 2

Es fácil comprobar que $U(p, x)$ cumple:

(i) Para un nivel de utilidad $U(p, x) = 1/\lambda$ las curvas de nivel de las funciones $U_1(p, x)$ y $U_2(p, x)$ coinciden puesto que $p = 1/(\lambda x)$ en ambos casos. Por tanto, dado que ambas funciones son continuas en el dominio relevante, tenemos que la función $U(p, x)$ es continua en £.

(ii) Para niveles de utilidad mayores de $1/\lambda$ ($U(p, x) = \alpha/\lambda$ donde $\alpha > 1$) las curvas de nivel de ambas funciones tienen forma diferente:

$$p = \frac{\alpha}{\lambda x} \text{ en el caso de función } U_1\ (p, x) \text{ y}$$

$$p = \frac{\alpha}{\lambda x} + \alpha - 1 \text{ en el caso de la función } U_2\ (p, x)$$

(iii) $U(p, x)$ es estrictamente creciente en p y x ($p > 0$, $x > 0$).

Veremos que, dadas estas similitudes y estas preferencias, se cumple que:

(i) $(S_x, S_p, \gtrsim)\ \varepsilon\ C$

(ii) No existe ninguna función $g(p) \cdot u(x)$ que represente $\gtrsim$ donde g y u representan las similitudes.

Demostración:

(i) Comprobaremos que estas preferencias representadas por la función $U(p, x)$ cumplen la condición suficiente.

Por una parte, las preferencias son fuertemente monótonas por definición de la función $U(p, x)$.

Por otra parte, tenemos que para cualquier $(x, p)\ \varepsilon$ £ se verifica $x/x_* = \lambda$ y $p/p_* = \lambda$. Por tanto $p_* x = p_* x = \lambda p_* x_* \leqq \lambda 1_* 1_* = \lambda(1/\lambda)(1/\lambda) = 1/\lambda$. En definitiva nos queda que para cualquier $(x, p)\ \varepsilon$ £ resulta que $p_* x = p x_* \leqq 1/\lambda$. Consecuentemente, para cualquier $(x, p)\ \varepsilon$ £ tendremos que $U(x_*, p) = p x_* = p_* x = U(x, p_*)$ de lo que se deduce que $(x, p_*) \approx (x_*, p)$.

Por tanto, según la proposición 1 tenemos que $(S_x, S_p, \gtrsim)\ \varepsilon\ C$.

(ii) Si la función $g(p) \cdot u(x)$ representa $\gtrsim$ cuando $p\, x \leqq 1/\lambda$ quiere decir que, necesariamente, existe una transformación monótona creciente T de forma que se verifique $g(p) \cdot u(x) = T(p \cdot x)$. Pero entonces ocurrirá que la función $g(p) \cdot u(x)$ no representará $\gtrsim$ cuando $p \cdot x > 1/\lambda$. Por tanto, no puede existir ninguna función de la forma $g(p) \cdot u(x)$ que represente $\gtrsim$. Esto concluye el contraejemplo.

4. Comentarios finales y perspectivas

A partir del conocimiento de las diversas evidencias empíricas que contradicen la Teoría de la Utilidad Esperada y en la línea de intentar construir una teoría alternativa, podrían adoptarse dos posiciones:

(i) Alterar los axiomas de la Teoría de la Utilidad Esperada hasta lograr una teoría alternativa consistente con la evidencia empírica.
(ii) Derivar de estas evidencias el conocimiento suficiente para poder construir, basándonos en ellas, axiomas «naturales» sobre el comportamiento de los individuos.

Rubinstein opina, y nos inclinamos a pensar como él, que la segunda opción resulta más prometedora para intentar construir una teoría descriptiva del comportamiento de los individuos bajo incertidumbre.

En la misma línea propuesta por Kahneman y Tversky, Rubinstein considera que la Paradoja de Allais revela una cierta propiedad de los esquemas de decisión utilizados por los individuos. Esta idea se formaliza mediante la introducción de relaciones de similitud en los espacios de premios y probabilidades y la especificación de un «esquema de decisión» basado en ellas e inspirado en lo que podría considerarse una «racionalización» de la Paradoja de Allais.

Rubinstein sugiere entonces que si las preferencias de un individuo sobre el conjunto de loterías son consistentes con sus relaciones de similitud a partir del «esquema de decisión» antes mencionado, entonces estas preferencias pueden ser representadas por una función de utilidad sobre loterías de la forma $g(p) \cdot u(x)$. Este sería, sin duda, un resultado deseable ya que, basándonos en axiomas casi «observados», tendríamos perfectamente caracterizado el comportamiento de un individuo mediante una expresión sencilla. Sin embargo, como hemos visto, este resultado no es necesariamente cierto.

Hemos encontrado una condición sobre las preferencias que es suficiente para que éstas sean consistentes con unas similitudes dadas y hemos visto que esta condición no es lo suficientemente fuerte como para permitirnos obtener el resultado deseado, sino que es una condición «débil» en el sentido que sólo afecta a las preferencias definidas sobre un subconjunto del espacio de loterías. Así, queda libre otro subconjunto sobre el cual las preferencias no necesitan satisfacer ninguna condición especial.

Este resultado depende crucialmente del hecho que el espacio de loterías es compacto y, por tanto, ésta debería ser la primera hipótesis a modificar. Para ello, dado que las probabilidades están acotadas por la unidad, es necesario que el conjunto de premios no esté acotado. Con ello evitaríamos contraejemplos como el presentado en la sección 2.3, pero deberían entonces solventarse otro tipo de problemas que aparecerían. El primero de ellos es que la definición de relación de similitud sólo se refiere a conjuntos acotados. Deberíamos por tanto modificar esta definición y comprobar entonces si aún podemos encontrar una representación para las similitudes como la referida en la sección 2.1. Incluso en este caso haría falta ver si esto es suficiente para obtener el resultado deseado sobre la representación de preferencias consistentes con relaciones de similitud.

A pesar de que estas modificaciones podrían, en principio, alterar el sentido de la aplicación de relaciones de similitud en la elección entre loterías, creemos que es éste un campo en el que pueden obtenerse esperanzadores resultados.

Referencias

Allais, Maurice (1953): «Le comportement de l'homme rationel devant le risque. Critique des postulates et axiomes de l'Ecole Americaine», *Econometrica, núm. 21.*

Chew Soo Hong (1983): «A Generalization of the Quasilinear Mean with Applications to the Measurament of Income Inequality and Decision Theory resolving the Allais Paradox», *Econometrica, núm. 51.*

Fishburn, Peter C. (1983): «Transitivity Measurable Utility», *Journal of Economic Theory, núm. 31.*

Grether, David M. y Plott, Charles R. (1979): «Economic Theory of Choice and the Preference Reversals Phenomenon», *American Economic Review, núm. 69.*

Hirshleifer, J. (1971): «The private and social value of information and the reward to inventive activity», *American Economic Review, núm. 61.*

Holt, Charles A. (1986): «Preference Reversals and the Independence Axiom», *American Economic Review, núm. 76.*

Kahneman, Daniel y Tversky, Amos (1979): «Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk», *Econometrica, núm. 47.*

Karmarkar, Uday S. (1978): «Subjectively Weighted Utility: A Descriptive Extension of the Expected Utility Model», *Organizational Behavior and Human Performance, núm. 21.*

Karni, Edi y Safra, Zvi (1987): «Preference Reversals and the observability of Preferences by Experimental Methods», *Econometrica, núm. 55.*

Leland, H. E. (1968): «Savings and Uncertainty: The precautionary demand for saving», *Quarterly Journal of Economics, núm. 82.*

Lichtenstein, Sarah y Slovic, Paul (1971): «Reversals of Preferences between Bids and Choices in Gambling Decisions», *Journal of Experimental Psychology, núm. 89.*

Lucas, R. y Prescott, E. (1974): «Equilibrium search and unemployement», *Journal of Economic Theory, núm. 7.*

Machina, Mark J. (1982): «Expected Utility Analysis without the Independence Axiom», *Econometrica, núm. 50.*

Markowitz, H. M. (1959): *Portofolio Selection-Efficient Diversification of Investments,* Wiley.

Quiggin, John (1982): «A Theory of Anticipated Utility», *Journal of Economic Behavoir and Organization, núm. 3.*

Rothschild, M. y Stiglitz, J. (1976): «Equilibrium in competitive insurance markets: An essay on the economics of perfect information», *Quarterly Journal of Economics, núm. 90.*

Rubinstein, Ariel (1988): «Similarity and Decison-Making under Risk (ĭs there a Utility Theory resolution to the Allais Paradox?)», *Journal of Economic Theory, núm. 46.*

Tversky, Amos (1977): «Features of Similarity», *Psychological Review, núm. 84.*

Von Neumann, John y Morgenstern, Oskar (1953): *Theory of Games and Economic Behavoir,* Princeton University Press.

Yaari, Menahem (1987): «The Dual Theory of Choice Under Risk», *Econometrica, núm. 55.*

Abstract

In a recent paper Rubinstein claims that if individuals have «Similarity Relations» defined on probabilities and prizes and choice procedure over lotteries is in some sense «natural» than the preference relations compatible with the similarities and the choice procedure are «almost» unique. Furthermore, these preferences are represented by a utility function of the type $g(p)\ u(x)$ where g and u are functions related to the Similarities over probabilities and prizes. In this paper we question Rubinstein's claim. We find a sufficient condition on preferences that yields compatibility with the pair of Similarities showing that this conditons is not as strong as Rubinstein claims. We show the existence of a subset of lotteries which need not satisfy any requirement.

Recepción del original, noviembre de 1988
Versión final, julio de 1989