Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XIV, n.º 3 (1990), págs. 503-517.

EMPRESAS MULTIPRODUCTO, COMPETENCIA EN PRECIOS Y LOCALIZACION

Xavier MARTINEZ GIRALT*

Universidad Autónoma de Barcelona
Instituto de Análisis Económico

El análisis de empresas multiproducto en modelos espaciales à la Hotelling donde los costes de transporte se definen como funciones cuadráticas de la distancia, nos muestra que las empresas no tienen incentivos para proliferar sus productos. El objetivo de esta nota es examinar la robustez de este resultado introduciendo diferentes escenarios, tanto en términos de la especificación del espacio (unidimensional), como de la función de costes de transporte. Demostramos que tal resultado es robusto a la definición del espacio, pero no lo es bajo formas funcionales más generales de los costes de transporte.

1. Introducción

La literatura sobre empresas multiproducto en modelos de competencia en el espacio, necesita dos supuestos para considerar los efectos del espacio de forma relevante. «El primero es que los 'costes de transporte' por unidad de distancia no sean triviales (...). El segundo es que haya economías de escala o rendimientos crecientes en la producción por lo menos al inicio de ésta (...). Si no suponemos los rendimientos crecientes las empresas producirían ahí donde los consumidores se encuentran y la discusión de los efectos del espacio quedaría vacía» (Waterson, 1984; pág. 115). Debe asimismo recordarse el paralelismo existente entre modelos de localización en el espacio y modelos de diferenciación de producto. El espacio físico en una interpretación se corresponde con el espacio de características en la otra, y los costes de transporte equivalen a la pérdida de utilidad de los consumidores asociada a la imposibilidad de poder consumir la más preferida variedad (el lector interesado encontrará excelentes contribuciones panorámicas generales en Archibald, Eaton y Lipsey, 1985; Beckmann y Thisse, 1986; Gabszewicz y Thisse, 1986; Gabszewicz y Thisse, 1989 y con un ámbito más reducido en Martínez Giralt, 1990). Esta equivalencia entre ambas interpretaciones nos permite

* El autor agradece los comentarios de un evaluador anónimo que han contribuido a mejorar la presentación de este trabajo. También agradece la financiación parcial del Ministerio de Educación y Ciencia a través de los proyectos CICYT PB 86-0613 y PB 87-0340.

pues, hablar indiferentemente de productos y puntos de venta (sucursales) así como de empresas multiproducto o empresas multiplanta.

Martínez Giralt y Neven (1988) consideran un modelo en el que dos empresas pueden localizar dos puntos de venta cada una en un mercado circular. Bajo los supuestos de costes de transporte cuadráticos, distribución uniforme de los consumidores y costes marginales de producción constantes, demuestran que el único equilibrio perfecto en los subjuegos consiste en la concentración de los dos puntos de venta de cada empresa en un mismo punto. Ello se debe a la función de costes de transporte utilizada. Cuando las empresas eligen de forma secuencial precios y localizaciones la competencia en precios es tan intensa que las empresas la relajan situando sus puntos de venta lo más lejos posible la una de la otra.

Una cuestión todavía abierta se refiere a la robustez de este resultado con respecto a la especificación del espacio y de los costes de transporte. El objetivo de esta nota es elaborar en esta cuestión, a través de ejemplos sencillos, para concluir que la concentración de puntos de venta es robusta a la especificación del espacio (unidimensional), pero no lo es respecto a la especificación de los costes de transporte.

Un primer esbozo se encuentra ya en el artículo mencionado anteriormente. Sobre un mercado lineal y con los mismos supuestos, consideramos que una empresa ya ha concentrado sus puntos de venta y analizamos la estrategia óptima para la empresa rival. Esta consiste en también concentrar sus puntos de venta. Ahí se demuestra que la concentración de productos (sucursales) en un punto es un equilibrio del juego secuencial, pero no es el único. Podemos identificar otras configuraciones de localización de sucursales en el mercado que son también equilibrios del juego. Debemos pues examinar la posibilidad de establecer algún tipo de relación de dominancia de un equilibrio sobre los demás. Este es el objeto de la primera parte del artículo. A continuación examinamos la robustez del equilibrio ante especificaciones de la función de costes de transporte más generales. En particular, examinamos el caso de costes lineal-cuadráticos. Una sección de conclusiones cierra el trabajo.

2. Costes cuadráticos

Recordemos a efectos de posterior comparación la situación referente al mercado lineal analizada en Martínez Giralt y Neven (1988): sobre un mercado lineal de longitud L del tipo de Hotelling, una empresa b tiene un punto de venta en un extremo del mercado, mientras que la empresa rival a puede colocar dos productos en los puntos a_1 y a_2. Medimos la distancia de los puntos de venta de la empresa a desde el extremo de la izquierda y el de la empresa b desde el extremo de la derecha (véase Gráfico 1).

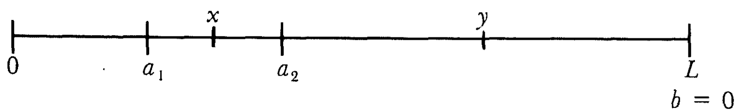

Gráfico 1

Supongamos que las empresas utilizan una tecnología definida por costes marginales constantes (cero). Su objetivo es maximizar beneficios decidiendo de forma secuencial las localizaciones de los puntos de venta en primer lugar, y los precios a continuación.

Los consumidores están uniformemente distribuidos sobre el mercado, tienen precios de reserva suficientemente altos y compran una unidad del bien a la empresa que les minimiza la suma del precio que han de pagar más el coste de transporte desde la empresa a sus domicilios. Estos costes se definen como una función cuadrática de la distancia.

En este escenario demostramos que la empresa a localiza de forma óptima sus sucursales en el punto cero (i.e. $a_1 = a_2 = 0$). En este equilibrio el nivel de beneficios es $\Pi_a(P^*, a^*) = \Pi_b(P^*, a^*) = \frac{tL^3}{2}$. Dado que puede desarrollarse un razonamiento similar para la empresa b, concentrar los puntos de venta en un punto maximizando la distancia entre las empresas es un equilibrio.

A continuación comprobaremos a través de ejemplos la robustez de este equilibrio. Los ejemplos consideran aquellas configuraciones del mercado que son claras candidatas a ser equilibrio y las compararemos con el caso anterior donde se concentran las sucursales.

2.1. *Caso 1*

La primera alternativa considera que la empresa a tiene dos sucursales localizadas en los extremos del mercado mientras que la empresa b tiene un punto de venta situado en algún punto intermedio, es decir $a_1 = 0$, $a_2 = L$; $0 < b < L$, (véase Gráfico 2).

Gráfico 2

Es fácil verificar que los precios de equilibrio son ahora

$$P_b^* = tb(L-b),$$

$$P_{a1}^* = \frac{tbL}{2},$$

$$P_{a2}^* = \frac{tb(L-b)}{2}$$

y las demandas evaluadas a estos precios de equilibrio son

$$D_{a1}(P^*) = D_{a2}(P^*) = \frac{L}{4},$$

$$D_b(P^*) = \frac{L}{2}.$$

En consecuencia, las funciones de beneficio evaluadas a los precios de equilibrio son

$$\Pi_a(P^*) = \frac{tL^3}{8},$$

$$\Pi_b(P^*) = \frac{tLb(L-b)}{2}.$$

La localización óptima de la sucursal de la empresa b es ahora $b^* = \frac{L}{2}$. Así pues obtenemos un equilibrio caracterizado por $P^*_{a1} = P^*_{a2} = P^*_b = \frac{tL^2}{4}$, dando lugar a beneficios $\Pi_a(P^*) = \Pi_b(P^*) = \frac{tL^3}{8}$. Este equilibrio es Pareto-dominado por el equilibrio obtenido cuando las empresas concentran sus sucursales en un punto. La consecuencia que se desprende de este ejercicio es pues, que si las empresas pueden elegir el número de puntos de venta a situar en el mercado, preferirán establecer sólo uno, dado que los beneficios que obtienen en equilibrio son mayores en este caso que los que obtienen si proliferan sus productos.

2.2. *Caso 2*

En el ejemplo que presentamos a continuación, ambas empresas sitúan dos puntos de venta en el mercado; cada empresa localiza un punto de venta a un extremo del mercado, mientras que las otras dos sucursales están cruzadas i.e. $a + b \geq L$ (véase Gráfico 3)

Gráfico 3

Examinaremos en primer lugar el equilibrio en precios. Después de sustituir estos precios de equilibrio en las funciones de beneficios, éstas devienen funciones de a y b. Los cálculos necesarios para la obtención de los precios de equilibrio son bastante tediosos y se encuentran en el apéndice 1.

A continuación, examinamos el equilibrio en localizaciones. Este análisis se concentra únicamente en localizaciones simétricas, es decir $a = b$ (recordemos que a se mide desde el extremo de la izquierda y b se mide desde el extremo de la derecha). Introduciendo esta restricción en las condiciones de primer orden (por simetría podemos reducir el análisis a, digamos, la empresa A), vemos (apéndice 1) que el único valor de a que satisface la condición de primer orden es $a^* = \frac{2}{3}$.

De nuevo podemos caracterizar un equilibrio en el cual las empresas obtienen beneficios $\Pi_A(P^*,a^*) = \Pi_B(P^*,a^*) = \frac{tL^3}{18}$. Este equilibrio también es Pareto-dominado por el equilibrio asociado a la concentración de las sucursales. Así pues, si las empresas pueden escoger el número de puntos de venta a instalar en el mercado, decidirán instalar uno solo.

3. Costes lineal-cuadráticos

Hemos comprobado hasta ahora que el equilibrio caracterizado por la concentración de las sucursales en un punto es robusto bajo la consideración de costes de transporte cuadráticos. Un paso adelante hacia una generalización de este resultado, es la introducción de funciones de coste de transporte más generales.

Consideremos de nuevo el caso en el que la empresa b tiene una sucursal localizada en el extremo derecho del mercado, mientras que la empresa A tiene dos puntos de venta situados a distancias a_1 y a_2 del extremo izquierdo del mercado (véase Gráfico 4).

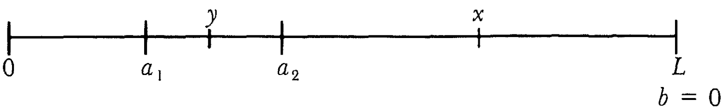

Gráfico 4

Sean x e y los consumidores indiferentes entre a_2 y b y entre a_1 y a_2 respectivamente. Sus expresiones son (ver apéndice 2),

$$x = \frac{P_b - P_{a2}}{2[c + d(L - a_2)]} + \frac{L + a_2}{2}$$

$$y = \frac{P_{a2} - P_{a1}}{2[c + d(a_2 - a_1)]} + \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Sea $\alpha \equiv [c + d(L - a_2)]$, y $\beta \equiv [c + d(a_2 - a_1)]$. La Demanda capturada por cada sucursal es,

$$D_b = L - x = \frac{P_{a2} - P_b}{2\alpha} + \frac{L - a_2}{2} \text{ si } \beta(a_2 - a_1) \geq P_{a2} - P_{a1} \geq -\beta(a_2 - a_1) \qquad [1]$$

$$D_{a1} = y = \frac{P_{a2} - P_{a1}}{2\beta} + \frac{a_1 + a_2}{2} \text{ si } \alpha(L - a_2) \geq P_{a2} - P_b \geq -\alpha(L - a_2) \qquad [2]$$

$$D_{a2} = x - y = \frac{P_b}{2\alpha} + \frac{P_{a1}}{2\beta} - \frac{P_{a2}}{2}\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) + \frac{L - a_1}{2} \text{ si [1] y [2]}$$

3.1. Desplazamiento de a_1 hacia a_2

Las funciones de beneficios se definen de forma tradicional. Queremos caracterizar un equilibrio no-cooperativo en precios, i.e. una tripleta $(P^*_{a1}, P^*_{a2}, P^*_b)$ tal que ninguna empresa pueda de forma unilateral mejorar su volumen de beneficios con respecto a los que consigue dada esta tripleta de precios. A partir de las condiciones de primer orden, obtenemos el siguiente sistema (véase apéndice 2).

$$P_{a1} = P_{a2} + \frac{\beta(a_1 + a_2)}{2}$$

$$P_{a2} = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}\left(\frac{P_{a1}}{\beta} + \frac{P_b}{2\alpha} + \frac{L - a_1}{2}\right)$$

$$P_b = \frac{1}{2}[P_{a2} + \alpha(L - a_2)]$$

La solución de este sistema de ecuaciones para los diferentes precios es

$$P^*_{a1} = \frac{1}{6}[c(6L + 5a_2 + 3a_1) + d(6L^2 - 4La_2 + a_2^2 - 3a_1^2)]$$

$$P^*_{a2} = \frac{c + d(L - a_2)(3L + a_2)}{3}$$

$$P^*_b = \frac{c + d(L - a_2)(3L + a_2)}{3}$$

Notemos en primer lugar, que P^*_{a2} y P^*_b son independientes de a_1. Ello, a su vez implica que la cuota de mercado correspondiente a la empresa *b*, i.e. $L - x(P^*)$ también es independiente de a_1. Notemos además que $\frac{\partial P^*_{a1}}{\partial a_1}$ es positiva o negativa según $\frac{c}{d} - 2a_1$ sea positivo o negativo (donde suponemos implícitamente que para la nueva localización a_1 todavía existe un equilibrio en precios). Finalmente es fácil verificar que $P^*_{a1} > P^*_{a2} > P^*_b$. Normalicemos el espacio $L = 1$.

Ahora debemos comprobar si el candidato a ser equilibrio en precios pertenece a los dominios definidos en las funciones de demanda. En particular, $P^*_{a1} - P^*_{a2} \leq \beta(a_2 - a_1)$ si y sólo si $\frac{c}{d} \leq \frac{3(a_2 - a_1)(a_2 - 3a_1)}{4 - a_2 + 9a_1}$. Esta condición nos dice algo más. Dado que $\frac{c}{d}$ y $(4 - a_2 + 9a_1)$ son positivos, se sigue que $(a_2 - 3a_1) > 0$ es necesario para que se verifique la condición. En otras palabras $a_2 > 3a_1$.

Por otra parte, dado que hemos normalizado el espacio, $L = 1$, tenemos que

$P^*_{a2} - P^*_b \leq \alpha(1 - a_2)$ si y sólo si $\frac{c}{d} \geq \frac{5a_2 - 3}{3}$. Así pues podemos enunciar una condición necesaria de existencia de equilibrio como sigue

$$\frac{5a_2 - 3}{3} \leq \frac{c}{d} \leq \frac{3(a_2 - a_1)(a_2 - 3a_1)}{4 - a_2 + 9a_1}$$

Esta implica $\frac{5a_2 - 3}{3} \leq \frac{3(a_2 - a_1)(a_2 - 3a_1)}{4 - a_2 + 9a_1}$ ó $23a_2 - 14a_2^2 + 81a_1a_2 - 27a_1 - 27a_1^2 - 12 \leq 0$. Recordemos que $\frac{\partial P^*_{a1}}{\partial a_1} < 0$ si $\frac{c}{d} < 2a_1$. En el Apéndice 2 se demuestra que

$$\frac{c}{d} \leq \frac{3(a_2 - a_1)(a_2 - 3a_1)}{4 - a_2 + 9a_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{d} < 2a_1.$$

Consecuentemente, $\frac{\partial P^*_{a1}}{\partial a_1} < 0$. Esto junto con el hecho de que $\frac{\partial x(P^*)}{\partial a_1} = 0$, nos dice que la empresa A no tiene incentivos para desplazar la sucursal a_1 hacia a_2, porque su cuota de mercado (dada por $x(P^*)$) no varía mientras que el precio que juega la sucursal a_1 disminuye.

3.1. Desplazamiento de a_2 hacia a_1

Nos podemos preguntar ahora si la empresa A tiene incentivos para desplazar la sucursal a_2 hacia a_1 (en un entorno de a_2 tal que todavía exista equilibrio de precios). Este será el caso si el nivel de beneficios de la empresa A mejora tras este cambio de localización. Calculemos el nivel de beneficios que obtiene la empresa A evaluado al nivel de precios de equilibrio. Los cálculos se relegan al apéndice 3.

Los beneficios se definen de la forma tradicional, $\Pi_A = P^*_{a1} D_{a1}(P^*) + P^*_{a2} D_{a2}(P^*)$. Dado que estamos considerando desplazamientos de la sucursal a_2 hacia a_1, calculamos como varían los beneficios ante variaciones de a_2. Si $\frac{\partial \Pi_A}{\partial a_2} < 0$ significaría que conforme a_2 se aproxima a a_1 (dentro del intervalo de localizaciones para el que existe un equilibrio en precios), los beneficios de la empresa A disminuyen, de manera que no habría incentivos para concentrar los puntos de venta. Por el contrario si $\frac{\partial \Pi_A}{\partial a_2} > 0$ tendríamos el argumento opuesto y la empresa A preferiría instalar una única sucursal.

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial a_2} = \frac{\partial P^*_{a1}}{\partial a_2} D_{a1}(P^*) + P^*_{a1} \frac{\partial D_{a1}(P^*)}{\partial a_2} + \frac{\partial P^*_{a2}}{\partial a_2} D_{a2}(P^*) + P^*_{a2} \frac{\partial D_{a2}(P^*)}{\partial a_2}$$

Normalicemos el espacio, $L = 1$. Entonces obtenemos,

$$\frac{\partial P^*_{a1}}{\partial a_2} = \frac{5c - 2d(1 - a_2)}{6}$$

$$\frac{\partial P^*_{a2}}{\partial a_2} = \frac{-2d(1 + a_2)}{3}$$

$$\frac{\partial D_{a1}(P^*)}{\partial a_2} = \frac{c^2 + 2cd(2 + 3a_2 + a_1) + 3d^2(a_2 - a_1)^2}{12\beta^2}.$$

$$\frac{\partial D_{a2}(P^*)}{\partial a_2} = \frac{\alpha\beta R - d^2(1 - 2a_2 + a_1)S}{12\alpha^2\beta^2}$$

donde

$$R \equiv 5c^2 + cd(-4 + 4a_2 - 3a_1) + d^2(-5 + 6a_2 - 2a_1 - 3a_2^2 + 4a_1a_2)$$
$$S \equiv c^2(10 + 5a_2 - 3a_1) + cd(12 + 4a_2 - 9a_1 - 3a_1a_2 + 2a_2^2 + 3a_1^2) + $$
$$+ d^2(1 - a_2)(a_2 - a_1)(6 - a_2 - 3a_1)$$

Es fácil comprobar que $\frac{\partial P^*_{a1}}{\partial a_2} > 0$ si $\frac{c}{d} > \frac{2(1 - a_2)}{5}$. Por otra parte, sabemos que $\frac{c}{d} > \frac{5a_2 - 3}{3}$. Por lo tanto, $\frac{c}{d} > \max\left\{\frac{5a_2 - 3}{3}, \frac{2(1 - a_2)}{5}\right\}$, y $\frac{5a_2 - 3}{3} > \frac{2(1 - a_2)}{5}$ si $a_2 > \frac{21}{31}$ ($\sim .677$).

Además, $S > 0$, de manera que $d^2(1 - 2a_2 + a_1)\,S < 0$ si a_2 es suficientemente grande. En particular, $a_2 > \frac{1 + a_1}{2}$.

Recordemos que ya hemos encontrado $\frac{c}{d} < \frac{3(a_2 - a_1)(a_2 - 3a_1)}{4 - a_2 + 9a_1}$

Consideremos por ejemplo los valores siguientes: $a_2 = .7$ y $a_1 = .1$, de manera que $\frac{c}{d} \in (.16, .1714)$. En este caso, $\frac{\partial P^*_{a1}}{\partial a_2} > 0$, $d^2(1 - 2a_2 + a_1)S < 0$, y

$$\frac{\partial D_{a2}(P^*)}{\partial a_2} = \frac{\{[c^2 + .3cd + \ldots][\ldots] + 3d^2[\ldots]\}}{12(\alpha\beta)^2}$$

Consideremos $d = 1$ y $c = .17$. En tal caso, como se muestra en el apéndice 3, $\frac{\partial D_{a2}(P^*)}{\partial a_2} > 0$ y $\frac{\partial \Pi_A}{\partial a_2} > 0$.

Consecuentemente, la empresa A prefiere concentrar las dos sucursales en un punto.

De la misma manera, si consideramos $a_2 = .5$ y $a_1 = 0$, entonces $\frac{c}{d} \in \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{14}\right)$. Tomemos $d = 1$ y $c = .21$. Entonces obtenemos, $\frac{\partial \Pi_A}{\partial a_2} < 0$, de manera que la empresa A prefiere mantener las dos sucursales.

4. Conclusión

El punto de partida del análisis propuesto en esta nota se sitúa en la contribución de Martínez Giralt y Neven (1988), donde se demuestra que en un espacio definido como una circunferencia en el que dos empresas producen un bien homogéneo, y los consumidores hacen frente a costes de transporte cuadráticos, el único equilibrio (en localizaciones cuasi-simétricas) presenta la concentración de las sucursales de cada empresa en un mismo punto. Cuando las empresas eligen de forma secuencial precios y localizaciones, ante costes de transporte cuadráticos, la competencia en precios es tan intensa que las empresas la relajan situando sus puntos de venta lo más lejos posible la una de la otra.

La cuestión todavía abierta que se aborda en esta nota es la robustez de este resultado a la especificación del espacio y de los costes de transporte. Un primer esbozo se encuentra también en el artículo mencionado anteriormente. Sobre un mercado lineal y con los mismos supuestos, consideramos que una empresa ya ha concentrado sus puntos de venta y analizamos la estrategia óptima para la empresa rival. Esta consiste en también concentrar sus puntos de venta.

Para analizar tal cuestión, planteamos una serie de ejemplos sencillos que consideran aquellas configuraciones del mercado claras candidatas a constituir un equilibrio, para compararlas con el modelo de partida donde se concentran las sucursales. Bajo costes cuadráticos, las empresas prefieren una configuración de mercado tal que les permita concentrar los puntos de venta en una única localización, pues de esta manera obtienen el máximo nivel de beneficios. A continuación, consideramos formas funcionales más generales para los costes de transporte. En particular, definimos éstos como una función lineal-cuadrática de la distancia. Ello tiene como resultado suavizar la intensidad de la competencia en precios de la primera etapa del juego, y en consecuencia podemos identificar configuraciones del mercado en las que los incentivos de las empresas son tales que éstas prefieren proliferar sus productos, junto con configuraciones de mercado ante las que las empresas prefieren concentrar las sucursales.

Apéndice 1

Denominemos x, y y z los consumidores indiferentes entre $\bar{a}$ y b, entre b y a, y entre a y $\bar{b}$ respectivamente. Sus expresiones son:

$$x = \frac{P_b - P_{\bar{a}}}{2t(L-b)} + \frac{L-b}{2}$$

$$y = \frac{P_b - P_a}{2t(L-b-a)} + \frac{L-b+a}{2}$$

$$z = \frac{P_{\bar{b}} - P_a}{2t(L-a)} + \frac{L+a}{2}$$

Las funciones de demanda son,

$$D_{\bar{a}}(P) = \frac{P_b - P_{\bar{a}}}{2t(L-b)} + \frac{L-b}{2}$$

$$D_a(P) = \frac{P_{\bar{b}}}{2t(L-a)} + \frac{P_b}{2t(a-L+b)} - P_a \frac{b}{2t(L-a)(a-L+b)} + \frac{b}{2}$$

$$D_{\bar{b}}(P) = \frac{P_a - P_{\bar{b}}}{2t(L-a)} + \frac{L-a}{2}$$

$$D_b(P) = \frac{P_{\bar{a}}}{2t(L-b)} + \frac{P_a}{2t(a-L+b)} - P_b \frac{a}{2t(L-b)(a-L+b)} + \frac{a}{2}$$

Maximizando las funciones de beneficio con respecto a los precios, obtenemos los candidatos a precios de equilibrio para cualquier par de localizaciones (a, b). Estos son:

$$P_{\bar{a}}^* = \frac{t(L-b)\left[(a-L+b)A + 3(L-b)B\right]}{6B}$$

$$P_a^* = \frac{t(L-a)\,(a-L+b)C}{3B}$$

$$P_{\bar{b}}^* = \frac{t(L-a)\left[(a-L+b)C + 3(L-a)B\right]}{6B}$$

$$P_b^* = \frac{t(L-b)\,(a-L+b)A}{3B}$$

donde

$$A = 2(L-a)(L-a+2b) + (L-b+2a)(3b+L-a)$$
$$B = 3ab + b(L-b) + a(L-a) - (L-b)(L-a)$$
$$C = 2(L-b)(L-b+2a) + (L-a+2b)(3a+L-b)$$

Evaluando los beneficios a los precios de equilibrio obtenemos,

$$\Pi_{\bar{a}} = \frac{t(L-b)}{2} \left[\frac{(a-L+b)A}{6B} + \frac{L-b}{2} \right]^2$$

$$\Pi_a = \frac{tb(L-a)(a-L+b)}{18} \left(\frac{C}{B} \right)^2$$

$$\Pi_{\bar{b}} = \frac{t(L-a)}{2} \left[\frac{(a-L+b)C}{6B} + \frac{L-a}{2} \right]^2$$

$$\Pi_b = \frac{ta(L-a)(a-L+b)}{18} \left(\frac{A}{B} \right)^2$$

Notemos que Π_a y Π_b son no negativos si $a + b \geq L$. Examinemos ahora el equilibrio en localizaciones. Por definición, $\Pi_A(a,b) = \Pi_{\bar{a}}(a,b) + \Pi_a(a,b)$ y $\Pi_B(a,b) = \Pi_{\bar{b}}(a,b) + \Pi_b(a,b)$. Consideremos $L = 1$. Nos concentraremos en el conjunto de localizaciones definidas por $a = b$. Introduciendo esta restricción en las condiciones de primer orden (por simetría podemos concentrar el análisis en, digamos, la empresa A),

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial a}\Big|_{a=b} = \frac{ta(24a^5 - 94a^4 + 97a^3 - 60a^2 + 23a - 2)}{2(4a-1)^3}$$

Notemos que dado $a \geq \frac{1}{2}$, se sigue $4a - 1 > 0$. Por lo tanto, esta derivada puede igualarse a cero sólo si $24a^5 - 94a^4 + 97a^3 - 60a^2 + 23a - 2$ se iguala a cero. Este polinomio en a tiene solamente dos raíces en $[0,1]$ en $a = \frac{2}{3}$, y en $a \sim .116$. Unicamente la primera raíz es factible.

Las expresiones de las funciones de beneficio evaluadas en el punto $a = b$, se reducen a:

$$\Pi_{\bar{a}}(a) = \Pi_{\bar{b}}(a) = \frac{t(1-a)}{2} \left[\frac{3a - a^2 - 1}{4a - 1} \right]^2$$

$$\Pi_a(a) = \Pi_b(a) = \frac{ta(1-a)(2a-1)}{2} \left[\frac{1+a}{4a-1} \right]^2$$

Los beneficios totales para las empresas A y B son

$$\Pi_A(a) = \Pi_B(a) = \frac{t(1-a)}{2(4a-1)^2} [a^2(11 - 3a + 3a^2) - 7a + 1],$$

Consecuentemente, $\Pi_A(a^*) = \Pi_B(a^*) = \frac{t}{18}$.

Apéndice 2

El consumidor indiferente x se define como la solución de $P_b + c(L-x) + d(L-x)^2 = P_{a2} + c(x-a_2) + d(x-a_2)^2$ o

$$x = \frac{P_b - P_{a2}}{2[c+d(L-a_2)]} + \frac{L+a_2}{2}$$

El consumidor indiferente y se define como la solución de $P_{a1} + c(y-a_1) + d(y-a_1)^2 = P_{a2} + c(a_2-y) + d(a_2-y)^2$ o

$$y = \frac{P_{a2} - P_{a1}}{2[c+d(a_2-a_1)]} + \frac{a_1+a_2}{2}$$

Si las tres sucursales son activas, requerimos que $a_1 < y < a_2$ y $a_2 < x < L$.

$$a_1 < y \quad \text{implica} \quad P_{a2} - P_{a1} > -(a_2 - a_1)[c+d(a_2-a_1)]$$

$$a_2 > y \quad \text{implica} \quad P_{a2} - P_{a1} < (a_2 - a_1)[c+d(a_2-a_1)]$$

$$a_2 < x \quad \text{implica} \quad P_{a2} - P_b < (L - a_2)[c+d(L-a_2)]$$

$$L > x \quad \text{implica} \quad P_{a2} - P_b > -(L - a_2)[c+d(L-a_2)]$$

Sea $\alpha \equiv [c+d(L-a_2)]$, y $\beta \equiv [c+d(a_2-a_1)]$. La demanda capturada por cada sucursal es,

$$D_b = L - x = \frac{P_{a2} - P_b}{2\alpha} + \frac{L-a_2}{2} \text{ si } \beta(a_2-a_1) \geq P_{a2} - P_{a1} \geq -\beta(a_2-a_1) \quad [A1]$$

$$D_{a1} = y = \frac{P_{a2} - P_{a1}}{2\beta} + \frac{a_1+a_2}{2} \text{ si } \alpha(L-a_2) \geq P_{a2} - P_b \geq -\alpha(L-a_2) \quad [A2]$$

$$D_{a2} = x - y = \frac{P_b}{2\alpha} + \frac{P_{a1}}{2\beta} - \frac{P_{a2}}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right) + \frac{L-a_1}{2} \text{ si [A1] y [A2]}$$

Denotemos $\Pi_A = \Pi_{a1} + \Pi_{a2}$, de manera que después de resolver las condiciones de primer orden para los precios obtenemos los precios (candidatos) de equilibrio,

$$P^*_{a1} = \frac{1}{6}[c(6L + 5a_2 + 3a_1) + d(6L^2 - 4La_2 + a_2^2 - 3a_1^2)]$$

$$P^*_{a2} = \frac{c + d(L-a_2)(3L+a_2)}{3}$$

$$P^*_b = \frac{c + d(L-a_2)(3L-a_2)}{3}$$

Dado que $P^*_{a1} > P^*_{a2} > P^*_b$, solamente necesitamos verificar que

$$P^*_{a2} - P^*_{a1} < (a_2 - a_1)[c + d(a_2 - a_1)]$$
$$P^*_{a2} - P^*_b < (L - a_2)[c + d(L - a_2)]$$

La primera desigualdad,

$$\frac{c(4 + 5a_2 + 3a_1) + 3d(a_2^2 - a_1^2)}{6} < (a_2 - a_1)[c + d(a_2 - a_1)]$$

podemos expresarla como,

$$c(4 - a_2 + 9a_1) < 3d(a_2 - a_1)(a_2 - 3a_1) \qquad [A3]$$

mientras que la segunda desigualdad podemos expresarla como,

$$\frac{2da_2(L - a_2)}{3} < (L - a_2)[c + d(L - a_2)]$$

tras normalizar el espacio, $L = 1$, obtenemos

$$d(5a_2 - 3) < 3c.$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial P^*_{a1}}{\partial a_1} = \frac{1}{2}(c - 2da_1)$$

de manera que $\frac{\partial P^*_{a1}}{\partial a_1} < 0$ implica $\frac{c}{d} < 2a_1$. Combinándolo con [A3],

$$\frac{c}{d} < \min\left\{\frac{3(a_2 - a_1)(a_2 - 3a_1)}{4 - a_2 + 9a_1},\ 2a_1\right\}$$

Es fácil verificar que

$$\frac{c}{d} < \frac{3(a_2 - a_1)(a_2 - 3a_1)}{4 - a_2 + 9a_1} \Rightarrow \frac{c}{d} < 2a_1 \Rightarrow \frac{\partial P^*_{a1}}{\partial a_1} < 0$$

Apéndice 3

Sea $L = 1$. Las demandas evaluadas a los precios de equilibrio son,

$$D_{a1}(P^*) = \frac{P^*_{a2} - P^*_{a1}}{2\beta} + \frac{a_2 + a_1}{2} = \frac{c(-4 + a_2 + 3a_1) + 3d(a_2^2 - a_1^2)}{12\beta}$$

$D_{a1}(P^*)$ es positiva si $\frac{c}{d} < \frac{3(a_2^2 - a_1^2)}{4 - a_2 + 3a_1}$. Ya hemos encontrado previamente que $\frac{c}{d} < \frac{3(a_2 - a_1)(a_2 - 3a_1)}{4 - a_2 + 9a_1}$. Es fácil verificar que la primera desigualdad está implicada por la última, de manera que $D_{a1}(P^*) > 0$.

$$D_{a2}(P^*) = \frac{P^*_{a1}\alpha + P^*_b\beta - P^*_{a2}(\alpha + \beta)}{2\alpha\beta} + \frac{1 - a_1}{2} =$$

$$= \frac{c^2 P + cdQ + d^2(1 - a_2)(a_2 - a_1)(6 - a_2 - 3a_1)}{12\alpha\beta}$$

donde

$$P \equiv 10 + 5a_2 - 3a_1$$

$$Q \equiv 12 + 4a_2 - 9a_1 + 2a_2^2 + 3a_1^2 - 3a_1 a_2$$

Recordemos que

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial a_2} = \frac{\partial P^*_{a1}}{\partial a_2} D_{a1}(P^*) + P^*_{a1} \frac{\partial D_{a1}(P^*)}{\partial a_2} + \frac{\partial P^*_{a2}}{\partial a_2} D_{a2}(P^*) + P^*_{a2} \frac{\partial D_{a2}(P^*)}{\partial a_2}$$

donde

$$\frac{\partial P^*_{a1}}{\partial a_2} = \frac{5c - 2d(1 - a_2)}{6}$$

$$\frac{\partial P^*_{a2}}{\partial a_2} = \frac{-2d(1 + a_2)}{6}$$

$$\frac{\partial D_{a1}(P^*)}{\partial a_2} = \frac{c^2 + 2cd(2 + 3a_2 + a_1) + 3d^2(a_2 - a_1)^2}{12\beta^2}$$

$$\frac{\partial D_{a2}(P^*)}{\partial a_2} = \frac{\alpha\beta R - d^2(1 - 2a_2 + a_1)S}{12\alpha^2\beta^2}$$

Evaluando $\frac{\partial \Pi_A}{\partial a_2}$ en $a_2 = .7, a_1 = .1, d = 1, c = .17$ obtenemos, $\frac{\partial \Pi_A}{\partial a_2} =$
$= .2422572 > 0$

De igual manera supongamos $a_1 = 0, a_2 = .5$. En tal caso, $\frac{1}{5} < \frac{c}{d} < \frac{3}{14}$.
Consideremos pues $d = 1, c = .21$. Entonces, $\frac{\partial \Pi_A}{\partial a_2} = -.870409 < 0$.

Referencias

Archibald, G. C.; Eaton, B. C. y Lipsey, R. G. (1985): «Address Models of Value Theory», en *New Developments in the Analysis of Market Structure,* editado por F. Matthewson y J. Stiglitz, Cambridge (Mass.), The MIT Press.

Beckmann, M. J. y Thisse, J. F. (1985): «The Location of Production Activities», en *Handbook of Regional and Urban Economics,* vol. 1: Regional Economics, editado por P. Nijkamp, Amsterdam, North-Holland.

Gabszewicz, J. J. y Thisse, J. F. (1986): «Spatial Competition and the Location of Firms», en *Location Theory. Fundamentals of Pure and Applied Economics,* vol. 5, editado por J. Lesourne y H. Sonnenschein, London, Harwood Academic Publishers.

Gabszewicz, J. J. y Thisse, J. F. (1989): «Location, CORE» Discussion Paper 8928, U.C.L., Louvain-la-Neuve (de próxima aparición en *Handbook of Game Theory with Economic Applications*).

Martínez Giralt, X. (1990): «Economía de la Diferenciación de Producto: una Guía Selectiva de la Literatura», *Cuadernos Económicos de ICE,* de próxima aparición.

Martínez Giralt, X. y Neven, D. (1988): «Can Price Competition Dominate Market Segmentation?», *The Journal of Industrial Economics,* XXXVI (4) junio, 431-442.

Waterson, M. (1984): *Economic Theory of the Industry,* Cambridge University Press, Cambridge.

Abstract

The analysis of multiproduct firms in spatial models à la Hotelling, where transport costs are defined as quadratic functions of distance, show that firms have no incentives to proliferate their outlets. The aim of this note is to examine the robustness of that result to the specification of the (one-dimensional) space as well as of the transport cost function. We show that while collapsing the outlets is robust to the definition of the space, it is not robust to more general formulations of the transportation cost functions.

Recepción del original, junio de 1989
Versión final, abril de 1990