Investigaciones Económicas. Volumen XVII (1) - Enero 1993, pp. 165-173

LA MEDICION DEL BIENESTAR MEDIANTE INDICADORES DE «RENTA REAL»: CARACTERIZACION DE UN INDICE DE BIENESTAR TIPO THEIL*

José María TOMAS ADRIAN
Universidad de Alicante

Antonio VILLAR
Universidad de Alicante
Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas

El objeto de este trabajo consiste en la caracterización de una medida de bienestar que depende positivamente del nivel de renta total y negativamente del primer índice de Theil. Esta medida pertenece a una familia de índices de bienestar que se formulan en términos de indicadores de «renta real», expresión que alude al propósito explícito de utilizar medidas de renta como indicadores de bienestar.

1. Introducción

En el trabajo de Sen (1976) se desarrolla una interesante aproximación al problema de la medición del bienestar a través de indicadores de renta. Para ello, Sen propone la valoración de las asignaciones mediante un sistema de precios sombra que recojan tanto el valor de mercado de los bienes como la valoración social de los individuos. Este procedimiento (conocido como el *enfoque de los bienes personalizados,* ya que la idea básica consiste en asociar a cada bien un precio sombra que depende tanto del bien en cuestión como del individuo que lo consume) posibilita la introducción de juicios de valor acerca de la distribución de riqueza. El término «renta real» se utiliza para hacer referencia a la medición del bienestar mediante tal sistema de precios sombra [véase Sen (1979) para una discusión más amplia].

Este tipo de formulación conduce a un indicador de renta real que podemos expresar como:

$$W(y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(y) y_i$$

* Este trabajo ha sido financiado por el *Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas.* Los autores desean agradecer a Luis Corchón, José A. Silva y, especialmente, a Carmen Herrero sus comentarios. El proceso de evaluación ha contribuido de manera sustantiva a la mejora del mismo.

donde $y = (y_1, ..., y_m)$ representa un vector de distribución de renta entre m individuos, y $\alpha_i(y)$ es una función de ponderación que refleja la valoración marginal social del individuo i-ésimo en la distribución y [nótese que si $\alpha_i(y) = 1$ para todo i, entonces $W(y)$ coincide con la renta nacional, mientras que tomando $\alpha_i(y) = 1/m$ para todo i, $W(y)$ resulta ser la renta *per capita*).

El trabajo original de Sen (1976) únicamente proporciona una ordenación parcial de distribuciones de renta. Es fácil no obstante extender este resultado a ordenaciones completas, suponiendo que la relación de preferencia social con la que se valoran las asignaciones es homotética [véase Herrero y Villar (1989)]. Ello además garantiza la existencia de una relación biunívoca entre funciones de bienestar social y medidas de igualdad relativa [Blackorby y Donaldson (1978)].

Una de las virtudes esenciales del procedimiento propuesto por Sen es que esta idea abstracta se puede materializar en indicadores concretos que resultan ser funciones crecientes de la renta media y decrecientes de la dispersión de la misma. En particular, tomando $\alpha_i(y)$ = n.º de orden en el *ranking* de rentas (ordenadas de mayor a menor), la función W adopta la forma:

$$W(y) = K\mu(y)[1 - G(y)]$$

donde K es una constante positiva, $\mu(y)$ representa la media de la distribución, y $G(y)$ es el índice de desigualdad de Gini asociado a dicha distribución. De este modo, resulta posible el empleo de estos indicadores de bienestar en el análisis empírico [véase por ejemplo Osmani (1982), Chakravarty y Dutta (1990), Herrero y Villar (1992)].

A pesar de su operatividad, el sistema de ponderación que conduce a esta fórmula de medición de la renta real resulta en parte arbitrario, y presenta una limitación importante (conocida como «homotecia distributiva»): únicamente el lugar ocupado en el *ranking* determina el peso que se le asocia a un determinado individuo, con independencia de cuáles sean las diferencias de renta.

En este trabajo presentamos un indicador de «renta real» de naturaleza similar al propuesto por Sen (es decir, que resulte una función creciente de la renta y una función decreciente de su dispersión), pero que no adolezca de la limitación señalada. Para ello estableceremos un conjunto de requisitos sobre la función $W(y)$ que representan criterios éticos explícitos y propiedades intuitivamente comprensibles, y que se cumplen si y sólo si

$$W(y) = m\,\mu(y) \quad [1 - \beta T_1(y)]$$

siendo m el tamaño de la población, β una constante positiva y $T_1(y)$ el primer índice de desigualdad de Theil. Recordemos que el primer índice de Theil se define como:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{m} s_i\, ln\,(m\, s_i)$$

donde $s_i = \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{m} y_j}$ designa la participación del individuo i-ésimo en la renta total ($i = 1, 2, ..., m$).

La idea de caracterizar un indicador de renta real basado en el primer índice de Theil tiene una doble motivación. En primer lugar, el índice de Theil resulta un índice de desigualdad con muy buenas propiedades tanto éticas como operativas [véase por ejemplo Zubiri (1985), Ruiz Castillo (1986)]. Por otro lado, aun cuando el primer índice de Theil es una medida de desigualdad ya caracterizada [véase Bourguignon (1979), Cowell y Kuga (1981), Foster (1983)], no hay hasta ahora una interpretación adecuada del significado de la función de bienestar social asociada [véase a este respecto lo señalado en Blackorby y Donaldson (1978, Sec. 4)].

La contribución que este trabajo ofrece puede interpretarse como un refinamiento de los resultados proporcionados en Herrero y Villar (1989), donde se propuso inicialmente un sistema de ponderaciones $\alpha_i(y)$ que generaba esta forma funcional de W. Presentamos en la Sección 2 los axiomas que emplearemos en la caracterización de W, caracterización que se desarrolla en la Sección 3.

2. Los axiomas

Sea R^m_{++} el interior del ortante positivo de R^m. Tomaremos este conjunto como el espacio de distribuciones de renta para una población compuesta de m individuos, siendo m mayor que dos[1]. Con ello supondremos desde el principio que todos los individuos poseen rentas estrictamente positivas, por pequeñas que éstas sean.

La siguiente definición, inspirada en el enfoque de los bienes personalizados, delimita el tipo de problema que queremos abordar:

Definición. W: $R^m_{++} \rightarrow R$ es un *indicador de renta real* si para cada $y \in R^m_{++}$, W es una función de la forma:

$$W(y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(y) y_i$$

donde α_i: $R^m_{++} \rightarrow R$ es una función de ponderación social que refleja la valoración marginal social del individuo i-ésimo en la distribución y.

Así pues definimos un indicador de renta real como una función que asocia a cada vector de rentas, la suma ponderada de las mismas (donde las ponderaciones son a su vez funciones de la renta). Puede comprobarse que cualquier

[1] Tomamos $m > 2$ al objeto de evitar inconsistencias al tomar derivadas parciales respecto de las rentas individuales, sin que la media de la distribución se altere.

relación de preferencia social que sea reflexiva, transitiva, completa, homotética y respetuosa con las preferencias individuales puede representarse de la forma $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(y)\, y_i$ [véase Sen (1976), Herrero y Villar (1989)].

Observación. Adviértase que, por su propia naturaleza, un indicador de renta real resulta dependiente de las unidades de medida de la renta. En lo que sigue supondremos que estas unidades están dadas y no cambian.

Consideremos el siguiente conjunto de axiomas, para $i = 1, 2, \ldots, m$.

Axioma 1 (DIFERENCIABILIDAD)

$\alpha_i : R^m_{++} \rightarrow R$ es continuamente diferenciable.

Axioma 2 (EQUIDAD MINIMA)

Para todo $y \in R^m_{++}$ dado, $y_i < y_j \Rightarrow \alpha_i(y) > \alpha_j(y)$.

Axioma 3 (INDEPENDENCIA)

$\alpha_i(y) = a_i(y_i;\ \mu)$.

Axioma 4 (HOMOGENEIDAD)

Para todo escalar $\lambda > 0$, $\alpha_i(\lambda y) = \alpha_i(y)$.

Axioma 5 (ESCALA)

(i) Si $y_i = \mu \quad \forall\ i$, entonces $\alpha_i(y) = 1$.

(ii) $\lim_{y_i \rightarrow m\mu} \alpha_i(y) = 0$

El Axioma 1 es de naturaleza instrumental (nos posibilita el recurso al cálculo diferencial).

El Axioma 2 corresponde al Axioma de Equidad Mínima [propuesto inicialmente en Sen (1973, p. 18)], e introduce un elemento valorativo fundamental: vamos a dar mayor peso en el bienestar colectivo a aquellos individuos con rentas más bajas.

El Axioma 3 nos dice que la importancia de un individuo en el cómputo del bienestar sólo depende de su propia renta y de la renta media (este Axioma puede interpretarse como un requisito de eficiencia informacional). Es inmediato comprobar que el Axioma 3 implica el cumplimiento del principio de réplicas de población (principio que establece que la unión de un número arbitrario de poblaciones idénticas no altera el bienestar per capita).

El Axioma 4 introduce la homogeneidad de grado cero en las funciones $\alpha_i(y)$. Ello equivale a suponer que cambios proporcionales en el vector de rentas no alteran los pesos de los individuos (se trata por tanto de pesos que varian con la renta relativa de los individuos). Una consecuencia importante del Axioma 4 es que $W(\lambda y) = \lambda W(y)$ (es decir, $W(y)$ es una función homogénea de grado 1). Así pues, la homogeneidad de grado cero en los coeficientes α_i junto con la forma funcional de los indicadores de renta real implican que, cuando cambia la media sin variar la distribución, el índice W debe cambiar en la misma proporción.

Finalmente, el Axioma 5 se refiere a la normalización de los α_i mediante la fijación de una escala. El punto (i) nos dice que cuando la renta está igualmente distribuida entonces podemos tomar la renta nacional como una adecuada medida de bienestar. El punto (ii) establece que daríamos un valor cero a $\alpha_i(y)$, si la renta estuviera totalmente concentrada en manos del i-ésimo individuo.

3. La caracterización

Dedicamos esta Sección a probar que un indicador de renta real $W: R^m_{++} \rightarrow R$ verifica los Axiomas de Diferenciabilidad, Equidad Mínima, Independencia, Homogeneidad y Escala si y sólo si:

$$W(y) = m\,\mu(y)\left[1 - \frac{1}{ln\, m} T_1(y)\right]$$

(donde T_1 representa el primer índice de Theil).

Los siguientes resultados nos dan características operativas interesantes de los ponderadores $\alpha_i(y)$:

PROPOSICIÓN 1. Bajo los Axiomas 1, 2 y 3, existe una función $a: R^2 \rightarrow R$ tal que $\forall y \in R^m_{++}$, $\alpha_i(y) = a(y_i, \mu)$ $i = 1, 2, ..., m$.

Demostración

El Axioma 3 implica que para establecer este resultado es suficiente probar que para todo $y \in R^m_{++}$ dado, $y_i = y_j \Rightarrow a_i(y_i, \mu) = a_j(y_j, \mu)$.

Sea $F(y_i, y_j) = a_i(y_i; \mu) - a_j(y_j; \mu)$. Fijando la variable $\bar{y}_j$, definimos la siguiente función:

$$h(y_i) = F(y_i, \bar{y}_j)$$

Consideremos ahora la función h en el intervalo cerrado:

$$[\bar{y}_j - \varepsilon; \bar{y}_j + \varepsilon]$$

El valor de h en los extremos de dicho intervalo viene dado por:

$$h(\bar{y}_j - \varepsilon) = F(\bar{y}_j - \varepsilon; \bar{y}_j) = a_i(\bar{y}_j - \varepsilon; \mu) - a_j(\bar{y}_j; \mu) > 0 \text{ [por (A.2.1)]}$$

$$h(\bar{y}_j + \varepsilon) = F(\bar{y}_j + \varepsilon; \bar{y}_j) = a_i(\bar{y}_j + \varepsilon; \mu) - a_j(\bar{y}_j; \mu) < 0 \text{ [por (A.2.1)]}$$

Aplicando el Teorema de Bolzano: $\exists\ y_j' \in [\bar{y}_j - \varepsilon;\ \bar{y}_j + \varepsilon]$ tal que $h(y_j') = 0$. Si $y_j' < \bar{y}_j$, se contradice el Axioma 2. Lo mismo ocurre con $y_j' > \bar{y}_j$. De esta forma, la única alternativa posible es que $y_j' = \bar{y}_j$.

Por tanto se puede concluir que $a_i(y_j'; \mu) = a_j(\bar{y}_j; \mu)$ por ser $h(y_j') = 0$, $\forall \bar{y}_j$. Por hipótesis, si $\bar{y}_j = \bar{y}_i$, entonces $a_i(\bar{y}_i; \mu) = a_j(\bar{y}_j; \mu)$ para todo $\bar{y}_j$.

Así pues, cuando se verifican los tres primeros Axiomas se cumple el *Principio de Anonimidad:* La diferencia entre los distintos individuos es debida, únicamente, a su nivel de renta.

PROPOSICIÓN 2. Bajo las condiciones de la Proposición 1, α_i es decreciente en y_i si y sólo si se verifica el Axioma de Equidad Mínima.

Demostración

($\rightarrow$) Supongamos que $a_i(y_i; \mu)$ es decreciente en y_i. Esto significa que si $y_i < y_j$, entonces $\alpha_i(y) = a_i(y_i; \mu) > a_j(y_j; \mu) = \alpha_j(y)$, por el Axioma 3. Pero esto quiere decir que se cumple el Axioma de Equidad Mínima.

($\leftarrow$) Supongamos que se cumple el Axioma de Equidad Mínima: si $y_i < y_j$ entonces $\alpha_i(y) > \alpha_j(y)$, con $y \in R^m_{++}$. Por el Axioma 3, $a_i(y_i; \mu) > a_j(y_j; \mu)$ para cualquier par de niveles de renta, entonces $a_i(y_i; \mu)$ es decreciente en y_i.

El resultado principal de este trabajo se resume en el siguiente Teorema:

TEOREMA. Un indicador de renta real W: $R^m_{++} \rightarrow R$ verifica los Axiomas de Diferenciabilidad, Equidad Mínima, Independencia, Homogeneidad y Escala, si y sólo si:

$$W(y) = m\,\mu(y)\left[1 - \frac{1}{ln\, m} T_1(y)\right]$$

(donde T_1 representa el primer índice de Theil).

Demostración

Desarrollaremos la prueba en tres pasos.

1. Observemos primero que la Proposición 1 nos permite asegurar que $\partial a_i/\partial\mu = \partial a_j/\partial\mu = f(\mu)$, $\forall i, j$. Además, a la vista de los Axiomas 1, 3 y 4, podemos aplicar el Teorema de Euler para concluir que:

$$\frac{\partial a_i}{\partial y_i} y_i + \frac{\partial a_i}{\partial \mu} \mu = 0$$

y por consiguiente, podemos escribir:

$$\frac{\partial a_i}{\partial y_i} = \frac{f(\mu)\,\mu}{y_i}$$

Por otra parte, el Axioma 4 nos permiten definir una función auxiliar, γ, como sigue: Tomemos $\lambda = 1/\mu > 0$, entonces,

$$\alpha_i(y) = \alpha_i\left(\frac{1}{\mu}y\right) = \gamma_i(x)$$

donde $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, siendo $x_i = y_i/\mu$ (x_i representa pues la participación del individuo i en la renta media). A la vista de las Proposiciones 1 y 2, resulta entonces inmediato comprobar que los Axiomas 1-5 resultan equivalentes a las siguientes propiedades:

(a) $\alpha_i(y) = \gamma(x_i)$, $\forall i = 1,...,m$.

(b) $\gamma(x_i) \in C^1$ en el interior de R_+.

(c) $\gamma(x_i)$ es estrictamente decreciente en x_i, con $\gamma(1) = 1$.

(d) $\dfrac{d\gamma(x_i)}{dx_i} = b/x_i$, donde b es una constante.

2. Veremos ahora que un indicador normalizado de renta real verifica las propiedades (a) – (d) si y sólo si:

$$\gamma(x_i) = 1 - \beta \ln x_i$$

donde β es una constante positiva.

Resulta inmediato comprobar que si $\gamma(x_i) = 1 - \beta \ln x_i$, entonces las propiedades (a) – (d) se verifican. Para comprobar la implicación inversa, observemos que resolviendo la ecuación diferencial $\dfrac{d\gamma(x_i)}{dx_i} = \dfrac{b}{x_i}$, tenemos que:

$$d\gamma(x_i) = b\,\frac{dx_i}{x_i}$$

De dónde se obtiene que $\gamma(x_i) = b \ln x_i + C$.

Por la propiedad (c) sabemos que $\dfrac{d\gamma(x_i)}{dx_i} < 0$ y por tanto podemos tomar $b \doteq -\beta$,

con $\beta > 0$. Por otro lado, por la propiedad (c) sabemos que $\gamma(1) = 1$, lo que implica que $C = 1$. Consecuentemente:

$$\gamma(x_i) = 1 - \beta \ln x_i$$

3. De acuerdo con 1 y 2, los Axiomas 1-5 resultan equivalentes a establecer un sistema de ponderaciones dado por:

$$\alpha_i(y) = 1 - \beta \, ln \frac{y_i}{\mu}$$

En consecuencia:

$$W(y) = \sum_{i=1}^{m} \left(1 - \beta \, ln \frac{y_i}{\mu}\right) y_i = \sum_{i=1}^{m} y_i - \beta \sum_{i=1}^{m} y_i \, ln \frac{y_i}{\mu}$$

$$= m\,\mu - \beta \sum_{i=1}^{m} y_i \, ln \frac{y_i}{\mu} = m\,\mu \left[1 - \frac{\beta}{m\,\mu} \sum_{i=1}^{m} y_i \, ln \frac{y_i}{\mu} \right] =$$

$$m\,\mu \left[1 - \frac{\beta}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{y_i}{\mu} ln \frac{y_i}{\mu} \right] = m\,\mu \left[1 - \beta \, T_1(y)\right]$$

Finalmente, es fácil ver que exigir el cumplimiento del Axioma 5 (correspondiente a la segunda parte de (c)) equivale a tomar

$$\beta = \frac{1}{ln\, m}$$

(puesto que $ln\,(y_i/\mu)$ tiende a $ln\, m$, conforme y_i tiende a $m\mu$).

Con ello completamos la demostración.

Observación. Los Axiomas 1 a 4 caracterizan medidas de renta real del tipo $W(y) = m\,\mu\left[1 - \beta\, T_1(y)\right]$, donde β es una constante positiva. El Axioma 5 garantiza que $W(y)$ sea una función creciente de μ y decreciente en T_1 (es fácil comprobar que para valores de β distintos de $\frac{1}{ln\, m}$, siempre podemos encontrar una distribución para la que esta propiedad deja de cumplirse).

Referencias

Blackorby, C. y Donaldson, D. (1978): «Measures of Relative Equality and their Meaning in Terms of Social Welfare», *Journal of Economic Theory* 18, pp. 59-80.

Bourguignon, F. (1979): «Decomposable Income Inequality Measures», *Econometrica* 47, pp. 901-920.

Chakravarty, S. R. y Dutta, B. (1990): «Migration and Welfare», *European Journal of Political Economy* 6, pp. 119-138.

Cowell, F. A. y Kuga, K. (1981): «Additivity and the Entropy Concept: An Axiomatic Approach to Inequality Measurement», *Journal of Economic Theory* 25, pp. 131-143.

Foster, J. E. (1983): «An Axiomatic Characterization of the Theil Measure of Income Inequality», *Journal of Economic Theory* 31, pp. 105-121.
Herrero, C. y Villar, A. (1989): «Comparaciones de Renta Real y Evaluación del Bienestar», *Revista de Economía Pública* 2, pp. 79-101.
Herrero, C. y Villar, A. (1992): «La Distribución del Fondo de Compensación Interterritorial entre las Comunidades Autónomas», *Hacienda Pública Española,* en prensa.
Osmani, S. R. (1982): *Economic Inequality and Group Welfare,* Oxford, Clarendon Press.
Ruiz Castillo, J. (1986): «Problemas Conceptuales en la Medición de la Desigualdad», *Hacienda Pública Española* 96, pp. 17-31.
Sen, A. (1973): *On Economic Inequality,* Oxford, Oxford University Press.
Sen, A. (1976): «Real National Income», *Review of Economic Studies* 43, pp. 19-39.
Sen, A. (1979): «The Welfare Basis of Real Income Comparisons: A Survey», *Journal of Economic Literature* 17, pp. 1-45.
Theil, H. (1967): *Economics and Information Theory.* Amsterdan, North-Holland.
Zubiri, I. (1985): «Una Introducción al Problema de la Medición de la Desigualdad», *Hacienda Pública Española* 95, pp. 291-317.

Abstract

The purpose of this paper is to characterize a welfare measure which depends positively on total income and negatively on Theil's first inequality index. Such a measure belongs to the family of «real national income» indicators (a family of income-based welfare indices).

Recepción del original, julio de 1992
Versión final, diciembre de 1992