INVESTIGACIONES ECONOMICAS. Volumen XIX (1) - Enero 1995, pp. 127-138

ESTUDIO COMPARATIVO DE DIVERSAS FUNCIONES CARACTERISTICAS ASOCIADAS A UN JUEGO EN FORMA NORMAL*

G. BERGANTIÑOS

Universidad de Vigo

Ignacio GARCIA JURADO

Universidad de Santiago de Compostela

En este trabajo estudiamos dos nuevos modos de definir la función característica con utilidad transferible asociada a un juego en forma normal y los comparamos con el propuesto por von Neumann y Morgenstern y con el propuesto por Myerson.

1. Introducción

En general se distinguen dos tipos de juegos o situaciones conflictivas: los cooperativos y los no cooperativos. La diferencia entre ellos radica en que, en los primeros, al contrario que en los últimos, se supone que los jugadores disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes. Esta diferencia da lugar a modelos completamente distintos para estudiar estos y aquellos juegos. A menudo, una determinada situación podría analizarse desde el punto de vista cooperativo y desde el no cooperativo (puesto que la posibilidad o no de que se tomen acuerdos vinculantes no depende de la situación en sí sino de las actitudes, habilidades e interrelaciones de los jugadores). Por lo tanto, se puede hablar de tres facetas o líneas maestras de la teoría de juegos: el estudio y desarrollo de modelos no cooperativos, el estudio y desarrollo de modelos cooperativos y el análisis de las relaciones entre ambos tipos de modelos. Este trabajo está ubicado en la tercera de las líneas anteriores.

En von Neumann y Morgenstern (1944) se propone un modo de definir el modelo cooperativo (la función característica) asociado a un modelo no cooperativo (juego en forma normal). Posteriormente Harsanyi (1963) y Myerson (1991) proponen otras formas de tratar el mismo problema. Esta

* Los autores agradecen el apoyo económico de la Xunta de Galicia a través de los proyectos XUGA20701B91 y XUGA20702B93. También quieren destacar que este trabajo ha mejorado considerablemente gracias a las sugerencias de dos evaluadores anónimos.

multiplicidad en los modos de definir la función característica asociada a un juego en forma normal no debe resultar sorprendente si tenemos en cuenta que, con ello, simplemente se está describiendo el marco en el que se va a producir la posterior negociación cuando, en una situación descrita por un juego en forma normal, los jugadores pueden tomar acuerdos vinculantes; también cuando, a partir de un juego bimatricial, obtenemos un juego de negociación bipersonal, hay más de un modo posible de definir el punto de desacuerdo. El interés de este problema es claro y resulta sorprendente lo escasamente que ha sido tratado en la literatura.

En este trabajo proponemos dos nuevos modos de definir la función característica (con utilidad transferible) asociada a un juego en forma normal y los relacionamos con la definición clásica introducida en von Neumann y Morgenstern (1944). Los nuevos procedimientos que proponemos están basados en la idea de definir funciones características que asignen a cada coalición la cantidad de utilidad que ésta podría garantizarse si el juego se jugase no cooperativamente (frente al procedimiento de von Neumann y Morgenstern, ligado al principio minimax, que asigna a cada coalición la cantidad de utilidad que ésta podría garantizarse si el juego se jugase no cooperativamente y el resto de los jugadores tuvieran intereses totalmente contrapuestos a los de ella). Como nuestra idea es, en el fondo, la misma que se utiliza en Myerson (1991) para definir una función característica alternativa a la de von Neumann y Morgenstern, también comparamos con el de Myerson nuestros procedimientos.

El trabajo está organizado del siguiente modo. En la Sección 2 introducimos los conceptos y notación que empleamos y motivamos la conveniencia de buscar procedimientos alternativos al de von Neumann y Morgenstern. En la Sección 3 presentamos dos nuevos modos de definir la función característica asociada a un juego en forma normal y los comparamos con el propuesto por Myerson. En la Sección 4 comparamos dichos modos entre ellos y con el de von Neumann y Morgenstern y estudiamos otras propiedades de los mismos.

2. El procedimiento de von Neumann y Morgenstern

Un juego en forma característica con utilidad transferible (juego TU) es un par (N, v) donde $N = \{1, \ldots, n\}$ representa el conjunto de jugadores y v es una aplicación de $2^N (2^N = \{S \mid S \subset N\})$ en $\mathbb{R}$ verificando que $v(\emptyset) = 0$. La función v recibe el nombre de función característica del juego. A menudo se identificará el juego TU con su función característica. Se dirá que un juego TU v es superaditivo si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ para cualesquiera $S, T \subset N$ con $S \cap T = \emptyset$. Definimos el *núcleo* de un juego TU v como el conjunto $C(v) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid \Sigma i \in S^{X_i} \geq v(S)\ \forall S \subset N\}$. Dada una coalición T, $|T|$ denotará su cardinal.

Un juego n-personal finito en forma normal Γ es una n + 1-tupla $(\Pi_1, \ldots, \Pi_n; h)$ donde, $\forall i \in N$, Π_i denota el conjunto finito de estrategias puras del jugador i, h_i es la función de pago al jugador i y h es la función vectorial

$(h_1, \ldots, h_n)$. $\Gamma(\mathcal{N})$ denotará el conjunto de todos los juegos n-personales finitos en forma normal.

Dada $T \subset \mathcal{N}$ definimos S_T como el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre $\times_{i \in T} \Pi_i$ (x denota el producto cartesiano). Si $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \times_{i \in \mathcal{N}} \Pi_i$, π_T denotará la restricción de π a los jugadores de T.

Se llaman estrategias mixtas del jugador i a los elementos de $S_{\{i\}}$ (por simplicidad, a partir de ahora, denotaremos dichos conjuntos por S_i) y combinaciones de estrategias mixtas a los elementos $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \times_{i \in \mathcal{N}} S_i$. Nótese que, para cada i, h_i se puede extender a $\times_{i \in \mathcal{N}} S_i$ del siguiente modo (denotaremos por H_i tal extensión):

$$H_i(s) = \sum_{\pi \in \times_{i \in \mathcal{N}} \Pi_i} s_1(\pi_1) \ldots s_n(\pi_n)\, h_i(\pi)$$

$\forall s \in \times_{i \in \mathcal{N}} S_i$. Se dirá que $s \in \times_{i \in \mathcal{N}} S_i$, una combinación de estrategias mixtas de Γ, es un equilibrio de Nash del juego Γ si, $\forall\, i \in \mathcal{N}$ y $\forall\, s_i' \in s_i$, se tiene que $H_i(s) \geq H_i(s/s_i')$ (donde s/s_i' denota la combinación de estrategias mixtas $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n)$). Llamaremos $\mathcal{NE}(\Gamma)$ al conjunto de equilibrios de Nash de Γ.

Para cualquier $T \subset \mathcal{N}$, si $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \times_{i \in \mathcal{N}} \Pi_i$, definimos $h_T(\pi) = \Sigma_{i \in T} h_i(\pi)$. Claramente h_T se puede extender a cualquier conjunto cuyos elementos sean distribuciones de probabilidad sobre $\times_{i \in \mathcal{N}} \Pi_i$ (tomando, como antes, la suma de los pagos esperados por los jugadores de T). Denotamos por H_T dicha extensión de h_T.

A cada juego finito en forma normal Γ, von Neumann y Morgenstern le asocian el juego TU $(\mathcal{N}, v_\Gamma)$ tal que $v_\Gamma(\emptyset) = 0$ y, si $T \neq \emptyset$, $T \subset \mathcal{N}$,

$$v_\Gamma(T) = \sup_{s_T \in S_T} \; \inf_{s'_{\mathcal{N} \setminus T} \in S_{\mathcal{N} \setminus T}} H_T(s_T, s'_{\mathcal{N} \setminus T}),$$

donde

$$H_T(s_T, s'_{\mathcal{N} \setminus T}) = \sum_{\pi \in \times_{i \in \mathcal{N}} \Pi_i} s_T(\pi_T)\, s'_{\mathcal{N} \setminus T}(\pi_{\mathcal{N} \setminus T})\, h_T(\pi)$$

Obsérvese que $v_\Gamma(T)$ representa lo que pueden garantizarse los miembros de la coalición T, aún en el supuesto de que los jugadores de $\mathcal{N} \setminus T$ se comportasen como si tuvieran intereses completamente contrarios a los de T. En von Neumann y Morgenstern (1944) se prueba que v_Γ es un juego superaditivo (para cualquier $\Gamma \in \Gamma(\mathcal{N})$). Esta es la función característica que normalmente suele asociarse a un juego en forma normal. Por eso le prestamos especial atención a lo largo de este trabajo.

Una función característica asociada a un juego en forma normal representa un marco de negociación aceptable por los jugadores, en caso de que éstos dispongan de mecanismos que les permitan tomar acuerdos vinculantes. Lógicamente, para describir dicho marco se pueden adoptar diferentes criterios. El procedimiento de von Neumann y Morgenstern es un criterio posible (basado en planteamientos minimax). En los apartados siguientes estudiaremos otros criterios (basados en planteamientos de equilibrio). A continuación presentamos un ejemplo que, en nuestra opinión, parece sugerir que, en ocasiones, el procedimiento de von Neumann y Morgenstern puede no ser el más adecuado para establecer un marco de negociación aceptable.

Ejemplo 1: Sea el juego Γ descrito por la matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} l_2 & r_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ d_1 \end{array} & \begin{pmatrix} (3,1) & (0,0) \\ (0,1) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Es fácil comprobar que $v_\Gamma(\emptyset) = 0$, $v_\Gamma(1) = 0$, $v_\Gamma(2) = 1$ y $v_\Gamma(1, 2) = 4$. Como consecuencia, según v_Γ, el segundo jugador (J2) está en una mejor posición negociadora que el primero (J1); sin embargo, esto no parece ajustarse bien a la realidad según argumentaremos a continuación.

En efecto, cuando ante un juego en forma normal queremos obtener una función característica TU, la situación en la que nos encontramos debe ser la siguiente. Hay un conjunto de agentes involucrados en un conflicto que se halla descrito por un juego en forma normal.

Los agentes disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes. Ante todo esto, se ha de elegir el marco de la negociación (la forma característica asociada) y, después, los jugadores han de negociar y acordar un reparto de la utilidad que, entre todos, pueden conseguir. Podría no llegarse a un acuerdo global; en tal caso, la situación conflictiva se resolvería (parcial o totalmente) de modo no cooperativo.

En nuestro ejemplo, si los jugadores no llegasen a un acuerdo y el conflicto hubiera de resolverse no cooperativamente, J1 elegiría u_1 (pues u_1 domina estrictamente a d_1) y J2 elegiría l_2 (pues l_2 domina estrictamente a r_2); obtendrían, pues, 3 y 1 unidades de utilidad, respectivamente. Si los jugadores son capaces de llegar a un acuerdo, se repartirán 4 unidades. La función característica que mejor refleja esta situación es, en nuestra opinión, la siguiente v: $v(\emptyset) = 0$, $v(1) = 3$, $v(2) = 1$ y $v(1, 2) = 4$.

3. Nuevas funciones características asociadas a un juego en forma normal

El procedimiento de von Neumann y Morgenstern para definir la función característica asociada a un juego en forma normal se basa en planteamientos minimax. Por tanto, asigna a cada coalición T lo máximo que ésta puede garantizarse en el caso de que los jugadores de $N \setminus T$ jueguen «contra ella». Sin embargo, en ocasiones, estos planteamientos son excesivamente pesimistas puesto que, si los jugadores de $N \setminus T$ juegan «contra los de T» puede resultar perjudicial para ellos mismos. En el ejemplo de la sección anterior, si

J2 juega «contra J1», utilizará su estrategia r_2, que siempre le proporciona un pago inferior a l_2. Nosotros vamos a introducir dos procedimientos alternativos, basados en planteamientos de equilibrio, aparentemente menos pesimistas. También en un planteamiento de equilibrio se basa la función característica de Myerson asociada a un juego en forma normal. Al final de esta sección compararemos nuestros dos procedimientos con el de Myerson. El procedimiento propuesto por Harsanyi también se basa en planteamientos de equilibrio, pero mucho más lejanos a los nuestros porque tienen en cuenta las amenazas que pueden proferir los jugadores; en realidad, este procedimiento es una generalización del criterio de amenazas racionales de Nash para definir el punto de desacuerdo en un problema de negociación.

En el primero de nuestros procedimientos supondremos que lo peor que le puede pasar a una coalición T es que los jugadores no puedan llegar a cooperar y se juegue el equilibrio de Nash que proporciona peor pago a los miembros de T.

Definición 1: *Dado* Γ *un juego finito en forma normal, se define el juego TU asociado* v^1_Γ *como*

$$v^1_\Gamma(T) = \inf_{s \in NE(\Gamma)} H_T(s), \ \forall\, T \subset N.$$

Nótese que el juego v^1_Γ siempre es superaditivo. En efecto, sean R y T dos coaliciones disjuntas de N. Entonces,

$$v^1_\Gamma(R \cup T) = \inf_{s \in NE(\Gamma)} H_{R \cup T}(s) = \inf_{s \in NE(\Gamma)} (H_R(s) + H_T(s)) \geq$$

$$\geq \inf_{s \in NE(\Gamma)} H_R(s) + \inf_{s \in NE(\Gamma)} H_T(s) = v^1_\Gamma(R) + v^1_\Gamma(T).$$

Además v^1_Γ siempre tiene núcleo no vacío, tal como vemos a continuación. En efecto, sea $s^* \in NE(\Gamma)$ tal que $v^1_\Gamma(N) = \Sigma_{i \in N} H_i(s^*)$. Entonces $(H_i(s^*))_{i \in N} \in C(v^1_\Gamma)$ ya que dada $T \subset N$, $v^1_\Gamma(T) = \inf_{s \in NE(T)} H_T(s) \leq H_T(s^*) = \sum_{i \in T} H_i(s^*)$.

En el Ejemplo 1 el único equilibrio de Nash es (u_1, l_2) por lo que $v^1_\Gamma(1) = 3$, $v^1_\Gamma(2) = 1$ y $v^1_\Gamma(1, 2) = 4$, tal como queríamos.

Si aplicamos este procedimiento al dilema del prisionero ($\Pi_1 = \Pi_2 = \{$*Coopera, Defrauda*$\}$, $h_1(C, C) = h_2(C, C) = 3$, $h_1(D, D) = h_2(D, D) = 1$, $h_1(C, D) = h_2(D, C) = 0$ y $h_1(D, C) = h_2(C, D) = 4$) obtenemos que $v^1_\Gamma(\emptyset) = 0$, $v^1_\Gamma(1) = v^1_\Gamma(2) = 1$ y $v^1_\Gamma(1,2) = 2$. En este ejemplo, aunque el pago 6 parece estar disponible para la coalición $\{1, 2\}$, ello no aparece reflejado en la función característica v^1_Γ. Esta deficiencia del procedimiento se manifiesta siempre que Γ posea equilibrios cuyos pagos asociados no sean óptimos de Pareto.

En nuestro segundo procedimiento, al igual que en el primero, se supone que lo peor que le puede ocurrir a una coalición T es que se juegue no cooperativamente; pero, ahora, se permite coordinación entre los jugadores de

T y también entre los de $N \setminus T$, lo cual hace que no se produzcan los inconvenientes del procedimiento anterior.

Dada una partición $P = \{T_1, \ldots, T_p\} \in P(N)$ ($P(N)$ denota el conjunto de particiones de N) y un juego finito en forma normal $\Gamma \in \Gamma(N)$, se define el juego Γ^P como:

$$\Gamma^P = (\times_{j \in T_1} \Pi_j, \ldots, \times_{j \in T_p} \Pi_j; h^P).$$

En este nuevo juego los jugadores son las clases de la partición P y la función de pago a cada jugador T_i viene dada por $h^P_{Ti}(\pi) = \Sigma_{j \in Ti} h_j(\pi)$ para toda π combinación de estrategias puras de Γ^P (nótese que esta definición tiene sentido puesto que las combinaciones de estrategias puras de Γ^P pueden identificarse con las de Γ). La extensión mixta de Γ^P se define de la forma habitual. Es evidente que, si cada clase de la partición P consta de un único jugador, entonces $\Gamma^P = \Gamma$. Dada $T \subset N$, denotaremos por $P(N, T)$ el conjunto de las particiones de N tales que una de sus clases es T.

Definición 2: *Dado un juego finito en forma normal Γ, se define el juego TU asociado v^2_Γ como*

$$v^2_\Gamma(T) = \inf_{P \in P(N,\, T),\, s \in NE(\Gamma^P)} H^P_T(s), \ \forall \ T \subset N.$$

Nótese que, en esta definición, estamos permitiendo que haya correlación entre las estrategias de los jugadores (del juego original) que pertenecen a un mismo elemento de una partición.

En el juego del Ejemplo 1, $v^2_\Gamma = v^1_\Gamma$. Nótese que, en dicho ejemplo, los dos nuevos procedimientos le asocian a Γ la función característica que nosotros considerábamos más razonable. Es importante resaltar que, así como v_Γ y v^1_Γ siempre son superaditivas (para cualquier Γ), v^2_Γ puede no ser superaditiva. Veámoslo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2: Sea el juego Γ descrito por las matrices:

$$\begin{array}{ccc} & l_2 & r_2 \\ u_1 & (1,1,3) & (3,0,0) \\ d_1 & (0,0,5) & (0,0,5) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & l_2 & r_2 \\ u_1 & (-5,-5,0) & (1,-6,1) \\ d_1 & (-10,-5,6) & (-10,-10,6) \end{array}$$

$$l_3 \qquad\qquad\qquad\qquad r_3$$

Para este juego se tiene que $v^2_\Gamma(1,2) < v^2_\Gamma(1) + v^2_\Gamma(2)$, con lo que podemos concluir que v^2_Γ no es superaditiva.

En efecto, el único equilibrio de Nash de Γ es (u_1, l_2, l_3) ya que, como u_1 domina estrictamente a d_1, J1 jugará siempre u_1 en cualquier equilibrio de Nash, J2 jugará l_2 (su mejor respuesta a u_1) y J3 su mejor respuesta a (u_1, l_2), que es l_3. Este equilibrio de Nash proporciona pago 1 a J1, 1 a J2 y 3 a J3.

Sea $P = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$. Esta partición es la única en la cual $\{1, 2\} \in P$, por lo que $v_\Gamma^2 (1, 2) = \inf_{s \in NE(\Gamma P)} H^P_{\{1,2\}} (s)$.

Γ^P es el juego que se indica a continuación.

$$\begin{array}{c} \\ u_1 l_2 \\ u_1 r_2 \\ d_1 l_2 \\ d_1 r_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} l_3 & r_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2,3) & (-10,0) \\ (3,0) & (-5,1) \\ (0,5) & (-15,6) \\ (0,5) & (-20,6) \end{pmatrix} \end{array}$$

En Γ^P el único equilibrio de Nash es $(u_1 r_2, r_3)$ ($u_1 r_2$ domina estrictamente a las otras estrategias puras de $\{1, 2\}$), el cual proporciona pago -5 a $\{1, 2\}$. Luego $v_\Gamma^2 (1, 2) = -5$.

A continuación vamos a calcular $v_\Gamma^2 (1)$ y $v_\Gamma^2 (2)$. Estudiemos el juego $\Gamma^{\{\{1,3\}, \{2\}\}}$.

$$\begin{array}{c} \\ u_1 l_3 \\ u_1 r_3 \\ d_1 l_3 \\ d_1 r_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} l_2 & r_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (4,1) & (3,0) \\ (-5,-5) & (2,-6) \\ (5,0) & (5,0) \\ (-4,-5) & (-4,-10) \end{pmatrix} \end{array}$$

En este juego, como la estrategia $d_1 l_3$ domina estrictamente al resto de las estrategias puras de $\{1, 3\}$, éstos siempre jugarán dicha estrategia en cualquier equilibrio de Nash. Como para $\{2\}$ son indiferentes l_2 y r_2, si $\{1, 3\}$ juegan según $d_1 l_3$, todos los equilibrios de Nash del juego conceden pago 0 a J2.

Debido a que el único equilibrio de Nash del juego Γ concedía pago 1 a J2 se concluye que $v_\Gamma^2 (2) = 0$.

Estudiemos, ahora, el juego $\Gamma^{\{\{2,3\}, \{1\}\}}$.

$$\begin{array}{c} \\ l_2 l_3 \\ l_2 r_3 \\ r_2 l_3 \\ r_2 r_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & d_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (4,1) & (5,0) \\ (-5,-5) & (1,-10) \\ (0,3) & (5,0) \\ (-5,1) & (-4,-10) \end{pmatrix} \end{array}$$

El único equilibrio de Nash de este juego es $(l_2 l_3,\ u_1)$ ya que u_1 domina estrictamente a d_1 y $l_2 l_3$ es la mejor respuesta de $\{2, 3\}$ a u_1. Teniendo en cuenta que este equilibrio proporciona pago 1 a J1, al igual que el único equilibrio de Nash de Γ, se concluye que $v_\Gamma^2\ (1) = 1$. En consecuencia, $v_\Gamma^2\ (1,2) = -5 < v_\Gamma^2\ (1) + v_\Gamma^2\ (2) = 1$.

Nótese que, por otro lado, es claro que

$$v_\Gamma^2\ (\mathcal{N}) = \max_{\pi \in \times_{i \in \mathcal{N}} \Pi_i} h_{\mathcal{N}}(\pi),$$

con lo que este procedimiento no tiene la deficiencia del anterior y, por ejemplo, si Γ es el dilema del prisionero, $v_\Gamma^2\ (1, 2) = 6$.

Como hemos comentado anteriormente, en Myerson (1991) se propone otro modo de definir funciones características asociadas a un juego en forma normal basadas en la idea de equilibrio. En concreto, Myerson sugiere que, dado $\Gamma \in \Gamma\ (\mathcal{N})$, se puede elegir como función característica asociada a Γ cualquier *representación de equilibrio* de Γ, entendiéndose por representación de equilibrio de Γ cualquier función característica v_Γ^* tal que, $\forall T \subset \mathcal{N}$,

$$v_\Gamma^*\ (T) = H_T^P(s) \text{ y } v_\Gamma^*\ (\mathcal{N} \setminus T) = H_{\mathcal{N} \setminus T}^P(s)$$

siendo $s \in \mathcal{N}E\,(\Gamma^P)$ y $P = \{T, \mathcal{N} \setminus T\}$.

Podemos preguntarnos si v_Γ^1 y v_Γ^2 son representaciones de Γ para cualquier $\Gamma \in \Gamma(\mathcal{N})$. En el caso de v_Γ^1 es claro que no, puesto que, volviendo al dilema del prisionero, $v_\Gamma^1\ (1, 2) = 2$ mientras que $v_\Gamma^*\ (1, 2) = 6$ para la única representación de equilibrio que existe en este ejemplo.

En el caso de v_Γ^2 la respuesta también es negativa. En primer lugar nótese que, $\forall \Gamma \in \Gamma(\mathcal{N})$ y $\forall T \subset \mathcal{N}$,

$$v_\Gamma^2\ (T) = \inf_{P \in P(\mathcal{N},\, T),\ s \in \mathcal{N}E(\Gamma^P)} H_T^P(s) \leq v_\Gamma^*\ (T)$$

$\forall v_\Gamma^*$ representación de equilibrio de Γ. Pero, además, existen $\Gamma \in \Gamma(\mathcal{N})$ y $T \subset \mathcal{N}$ tales que $v_\Gamma^2\ (T) < v_\Gamma^*\ (T)$ para toda v_Γ^* representación de equilibrio de Γ. En efecto, sea Γ el juego que se detalla a continuación.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} l_2 & r_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ d_1 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (10,10,10) & (0,0,0) \\ (0,2,8) & (0,3,3) \end{array}\right) \\ & l_3 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} l_2 & r_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ d_1 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (0,7,2) \end{array}\right) \\ & r_3 \end{array}$$

Sea, ahora, $\Gamma^{\{\{1\},\{2,3\}\}}$ el juego siguiente.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} l_2l_3 & l_2r_3 & r_2l_3 & r_2r_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ d_1 \end{array} & \begin{pmatrix} (10,20) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,10) & (0,0) & (0,6) & (0,9) \end{pmatrix} \end{array}$$

Como $(d_1, r_2, l_3) \in \mathcal{NE}(\Gamma)$, $v_\Gamma^2\ (1) \leq 0$. Sin embargo, el único equilibrio de $\Gamma^{\{\{1\},\{2,3\}\}}$ es (u_1, l_2l_3) (pues l_2l_3 domina estrictamente al resto de las estrategias del segundo jugador). Por lo tanto, $v_\Gamma^*\ (1) = 10$ para cualquier v_Γ^* representación de equilibrio de Γ.

4. Propiedades de los nuevos procedimientos

En la sección anterior hemos descrito dos nuevos modos de definir la función característica asociada a un juego en forma normal. A continuación estudiaremos algunas propiedades de las nuevas funciones características así obtenidas. En primer lugar las compararemos con la de von Neumann y Morgenstern (descrita en la Sección 2).

Empezaremos estudiando la relación entre v_Γ y v_Γ^1. Al definir v_Γ se supone que la situación más desfavorable para una coalición T es que los jugadores de $\mathcal{N} \setminus T$ jueguen «contra ella», mientras que, al definir v_Γ^1, se considera que lo peor que le puede ocurrir a T es que se juegue el equilibrio de Nash que más le perjudica. Por tanto, podría pensarse que el criterio de von Neumann y Morgenstern siempre es más pesimista. Sin embargo, no es cierto que $\forall\ \Gamma \in \Gamma\ (\mathcal{N})$ se verifique que $v_\Gamma \leq v_\Gamma^1$ (es decir, $v_\Gamma\ (T) \leq v_\Gamma^1\ (T)\ \forall T \subset \mathcal{N}$), tal como vemos a continuación.

En el Ejemplo 2, $v_\Gamma^1\ (1, 3) = 4$ ya que (u_1, l_2, l_3), el único equilibrio de Nash de Γ, proporciona pago 1 a J1 y pago 3 a J3. Por otra parte, si J1 y J3 juegan d_1 y l_3 respectivamente, se pueden garantizar, entre los dos, un pago de 5 unidades, independientemente de lo que haga J2. Como consecuencia

$$v_\Gamma\ (1, 3) = \sup_{s_T \in S_T}\ \inf_{s'_{\mathcal{N}\setminus T} \in S_{\mathcal{N}\setminus T}} H_T\,(s_T, s'_{\mathcal{N}\setminus T}) \geq \inf_{s'_{\mathcal{N}\setminus T} \in S_{\mathcal{N}\setminus T}} H_T((d_1, l_3), s'_{\mathcal{N}\setminus T}) = 5$$

por lo que $v_\Gamma\ (1, 3) > v_\Gamma^1\ (1, 3)$.

Tampoco es cierto que, $\forall\ \Gamma \in \Gamma\ (\mathcal{N})$, $v_\Gamma \geq v_\Gamma^1$. En el Ejemplo 1 hemos visto que $v_\Gamma\ (1) = 0 < 3 = v_\Gamma^1\ (1)$.

Sin embargo sí existe relación entre la función característica de von Neumann y Morgenstern y la que se obtiene del segundo de los nuevos procedimientos que hemos descrito. En concreto, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 1: $\forall\ \Gamma \in \Gamma\ (\mathcal{N})$ *se tiene que* $v_\Gamma^2 \geq v_\Gamma$.

Demostración: Para demostrar este teorema bastará probar que, dados $T \subset N$ y $P = \{T_1, \ldots, T_p\} \in P(N, T)$, si $\hat{s} \in NE(\Gamma^P)$, entonces se verifica que $v_\Gamma(T) \leq H_T^P(\hat{s})$. En efecto,

$$v_\Gamma(T) = \sup_{s_T \in S_T} \inf_{s'_{N\setminus T} \in S_{N\setminus T}} H_T(s_T, s'_{N\setminus T}) = \sup_{s_T \in S_T} \inf_{\pi_{N\setminus T} \in \times_{i\in N\setminus T}\Pi_i} H_T(s_T, \pi_{N\setminus T}) =$$

$$= \sup_{s_T \in S_T} \inf_{y \in \times_{Tj \in P, Tj \neq T} S_{Tj}} H_T^P(s_T, y) \leq \sup_{s_T \in S_T} H_T^P(s_T, (\hat{s}_{Tj})_{Tj \neq T}) = H_T^P(\hat{s}).\square$$

Una consecuencia inmediata de este teorema y de que $v_\Gamma(N) = v_\Gamma^2(N)$ es que $C(v_\Gamma^2) \subset C(v_\Gamma)$.

Por último veremos que no existe relación entre v_Γ^1 y v_Γ^2. En el Ejemplo 2, $v_\Gamma^1(1, 3) = 4$ y $v_\Gamma(1, 3) \geq 5$. Como v_Γ^2 siempre es mayor o igual que v_Γ, se tiene que $v_\Gamma^2(1, 3) > v_\Gamma^1(1, 3)$.

Por otra parte, en el mismo ejemplo, se puede comprobar que $v_\Gamma^2(1, 2) = -5$. Teniendo en cuenta que el único equilibrio de Nash del juego de dicho ejemplo proporciona a J1 y a J2 pago 1, se concluye que $v_\Gamma^1(1, 2) = 2$ y, por lo tanto, $v_\Gamma^1(1, 2) > v_\Gamma^2(1, 2)$.

El proceso recíproco a los anteriores, es decir, construir un juego en forma normal a partir de un juego en forma característica con utilidad transferible, fue estudiado en von Neumann y Morgenstern (1944). Como puede verse en Borm y Tijs (1992), dicho estudio tiene especial interés para implementar no cooperativamente soluciones cooperativas.

En von Neumann y Morgenstern (1944) se asocia a cada juego en forma característica un juego en forma normal en el cual las estrategias de los jugadores consisten en solicitar coaliciones con las que desean cooperar. Si un jugador solicita una coalición y ésta ha sido solicitada por sus otros miembros, dicha coalición se forma y sus integrantes se reparten la utilidad que consiguen a partes iguales; en caso contrario dicho jugador recibe lo que puede conseguir individualmente.

Definición 3: *Dado un juego TU w, se define el juego finito en forma normal $\Gamma(w) = (\overline{\Pi}_1, \ldots, \overline{\Pi}_n; \overline{h})$ donde, $\forall\, i \in N$, $\overline{\Pi}_i = \{T_i \subset N \mid i \in T_i\}$ y*

$$\overline{h}_i(T_i, \ldots, T_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{|T_i|}\, w(T_i) & si\ T_j = T_i \quad \forall\, j \in T_i \\ \\ w(i) & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

El siguiente resultado fue obtenido por von Neumann y Morgenstern (1944).

Teorema 2: *Dado un juego TU w, si consideramos los juegos $\Gamma(w)$ y $v_{\Gamma(w)}$ se tiene que:*

1. $w \leq v_{\Gamma(w)}$.

2. $w = v_{\Gamma(w)}$ *si y sólo si* w *es superaditivo.*

3. *Si* $\bar{w}$ *es un juego TU tal que* $w \leq \bar{w}$, *entonces* $v_{\Gamma(w)} \leq v_{\Gamma(\bar{w})}$.

Como consecuencia del teorema anterior se concluye que $v_{\Gamma(w)}$ es el menor juego superaditivo mayor o igual que w; es decir, $v_{\Gamma(w)}$ es la superaditivización de w. En efecto, sea $\bar{w}$ superaditivo tal que $w \leq \bar{w}$. En vista del Teorema 2, $w \leq v_{\Gamma(w)} \leq v_{\Gamma(\bar{w})} = \bar{w}$. Como $v_{\Gamma(\bar{w})}$ es superaditivo, ya hemos probado lo que queríamos. Otra consecuencia de este teorema es que todo juego superaditivo w es inducido, mediante el procedimiento de von Neumann y Morgenstern, por un juego en forma normal $(\Gamma(w))$.

Para el segundo de los procedimientos descritos en la Sección 3 hemos demostrado un resultado análogo.

Teorema 3: *Dado un juego TU* w, *si consideramos los juegos* $\Gamma(w)$ *y* $v^2_{\Gamma(w)}$ *se tiene que:*

1. $w \leq v^2_{\Gamma(w)}$.

2. $w = v^2_{\Gamma(w)}$ *si y sólo si* w *es superaditivo.*

3. *Si* $\bar{w}$ *es un juego TU tal que* $w \leq \bar{w}$, *entonces* $v^2_{\Gamma(w)} \leq v^2_{\Gamma(\bar{w})}$.

Demostración: Sea T una coalición y $P = \{T_1, \ldots, T_P\} \in P(N, T)$. Dada $T_j \in P$, sea $\{T^j_1, \ldots, T^j_{m(j)}\} \in P(T_j)$ tal que

$$\max_{\bar{P} \in P(T_j)} \sum_{R \in \bar{P}} w(R) = \sum_{i=1}^{m(j)} w(T^j_i).$$

Sea $x = (x_i)_{i \in N}$ donde, $\forall i \in N$, $x_i = T^j_k$ tal que $i \in T^j_k$. Evidentemente $\bar{h}_i(x) = \frac{1}{|x_i|} w(x_i)$ $\forall i \in N$. Además es inmediato comprobar que x es un equilibrio de Nash de $(\Gamma(w))^P$. Por otro lado, para cualquier x', combinación de estrategias de $(\Gamma(w))^P$, es claro que $\bar{h}^P_{Tj}(x'/x_{Tj}) = \Sigma_{i=1}^{m(j)} w(T^j_i)$. Por lo tanto, para cualquier $T \subset N$,

$$v^2_{\Gamma(w)}(T) = \max_{\bar{P} \in P(T)} \sum_{R \in \bar{P}} w(R).$$

Como consecuencia inmediata de este hecho se obtienen los apartados 1, 2 y 3 del teorema. □

Este resultado nos permite afirmar que toda función característica superaditiva w puede obtenerse a partir de un juego no cooperativo en forma normal $(\Gamma(w))$ usando el segundo de nuestros procedimientos. Por otro lado, combinando los Teoremas 1, 2 y 3 podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4: *Para todo juego TU* w *se tiene que:*

$$w \leq v_{\Gamma(w)} = v^2_{\Gamma(w)}.$$

Demostración: Por el Teorema 2 se tiene que $w \leq v_{\Gamma(w)}$ y por el Teorema 1 que $v_{\Gamma(w)} \leq v^2_{\Gamma(w)}$. Aplicando, ahora, el Teorema 3 y teniendo en cuenta que $v_{\Gamma(w)}$ es superaditiva y mayor o igual que w

$$v^2_{\Gamma(w)} \leq v^2_{\Gamma(v_{\Gamma(w)})} = v_{\Gamma(w)}.\square$$

Nótese que el Teorema 4 nos permite afirmar que, para todo juego TU w, $v^2_{\Gamma(w)}$ es superaditivo y, además, es el menor juego superaditivo mayor o igual que w.

En resumen, la aplicación que asigna a cada juego TU w el juego TU $v_{\Gamma(w)} = v^2_{\Gamma(w)}$ es monótona no decreciente y sus únicos puntos fijos son los juegos superaditivos.

Para terminar, nos vamos a concentrar en el primero de los procedimientos introducidos en la Sección 3. Sea w un juego TU; consideremos el juego $\Gamma(w)$. Es evidente que la combinación de estrategias $(\{1\}, \ldots, \{i\}, \ldots, \{n\})$ es un equilibrio de Nash de $\Gamma(w)$. Por otra parte, para toda combinación de estrategias mixtas x de $\Gamma(w)$ se tiene que $\underline{H}_i\ (x/\{i\}) = w(i)$. Esto nos permite afirmar que, si $y \in NE\ (\Gamma(w))$, entonces $H_i\ (y) \geq w(i)\ (\forall i \in N)$. Por lo tanto, para cualquier juego TU w, se tiene que

$$v^1_{\Gamma(w)}(T) = \sum_{i \in T} w(i) \ \forall\ T \subset N.$$

Con lo cual obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 5: *Si w es un juego TU, entonces $w = v^1_{\Gamma(w)}$ si y sólo w es un juego aditivo.*

Este teorema nos permite afirmar que todo juego aditivo w es inducido, mediante el primer procedimiento introducido en la Sección 3, por un juego en forma normal ($\Gamma(w)$).

Referencias

Borm, P. E. M. y Tijs, S. H. (1992): «Strategic claim games corresponding to an NTU-game», *Games and Economic Behavior* 4, pp. 58-71.

Harsanyi, J. C. (1963): «A simplified bargaining model for the n-person cooperative game», *International Economic Review* 4, pp. 194-220.

Myerson, R. B. (1991): *Game theory, Analysis of conflict*, Harvard University Press.

von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944): *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton.

Abstract

In this paper we propose two new ways of defining the transferable utility characteristic function associated to a normal form game and we compare them with the classical one due to von Neumann and Morgenstern and with the one proposed by Myerson.

Recepción del original, mayo de 1994
Versión final, diciembre de 1994