INVESTIGACIONES ECONÓMICAS. vol XXIV (1), 2000, 207-218

UNA NOTA SOBRE VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS Y ARBITRAJE

FRANCESC LLERENA-GARRÉS
Universitat Rovira i Virgili

Este trabajo extrapola los resultados de Kim (1987), sobre la inconsistencia del modelo Merton (1973) de valoración de opciones de compra europeas sobre acciones con pago continuo de dividendos, a opciones americanas sobre acciones que pagan dividendos en un número finito de instantes temporales. En particular, se demostrará que el modelo de Schwartz (1977) viola la condición de ausencia de arbitraje sobre la que se fundamenta. Se propone una reformulación del modelo en función del activo neto de dividendos y un planteamiento alternativo interpretando la opción descrita como una opción bermuda.

Palabras clave: arbitraje, inconsistencia interna, opción.

(*JEL* G13)

1. Introducción

La moderna teoría de valoración de opciones se fundamenta en una relación de ausencia de arbitraje[1]. No obstante, Kim (1987) demostró que el modelo de Merton (1973) para valorar una opción de compra europea sobre acciones con pago continuo y conocido de dividendos era internamente inconsistente en cuanto que violaba dicha hipótesis. La inconsistencia de este modelo permite demostrar la de los modelos de Ingersoll (1977 p. 301) y de Jones-Mason (1980 pp. 91 y ss.)[2]. El objeto de esta nota es extender los resultados de Kim (1987) a las opciones americanas sobre acciones que pagan dividendos en un número finito de instantes temporales; en particular, se demostrará la

Quisiera agradecer a Máximo Borrel y al evaluador anónimo sus comentarios y sugerencias

[1] Utilizando la definición de Dybvig y Ross (New Palgrave. 1988, Dybvig y Ross, p. 100): "una oportunidad de arbitraje es una estrategia de inversión que garantiza un flujo de caja positivo en alguna circunstancia sin posibilidades de flujos de caja negativos y con inversión neta nula."

[2] Ver Llerena (1996 pp. 122 y ss.)

inconsistencia interna del modelo de Schwartz (1977). Lógicamente, la extrapolación, si bien no es inmediata, tampoco es sorprendente ya que el factor clave es el carácter conocido de la fecha de dividendos.

El trabajo de Schwartz plantea un modelo partiendo de la inexistencia de oportunidades de arbitraje y propone un procedimiento numérico de valoración. Nuestra demostración se basa en un argumento de arbitraje y muestra que el modelo es estructuralmente incorrecto en cuanto que, en determinadas circunstancias, el valor teórico, no su aproximación numérica, contradice la hipótesis de ausencia de arbitraje.

El argumento que invalida el modelo de Schwartz se basa en demostrar que el modelo debe verificar dos relaciones de dominio incompatibles entre sí. Por un lado, el valor de la opción de compra americana debe ser estrictamente positivo si, y sólo si, lo es el valor del subyacente. En efecto, considérese una opción de compra europea con vigencia en el intervalo (t_i, t_{i+1}). Es claro que para que no existan oportunidades de arbitraje el valor de la opción americana debe ser, como mínimo, igual al de la europea. Puesto que en (t_i, t_{i+1}) la dinámica del subyacente sigue un proceso Browniano geométrico, el valor de la opción europea vendrá determinado por la fórmula de Black-Scholes (1973) que, como es bien sabido, asigna valores positivos cuando, y sólo cuando, el subyacente toma valores positivos. Por otro lado, y bajo la hipótesis de que la opción no se ejercerá anticipadamente, si el valor del subyacente neto de dividendos es nulo, la opción debe carecer de valor ya que, en caso contrario, existiría una oportunidad de arbitraje vendiendo la opción y comprando el subyacente neto. Esta última condición implica que para determinados valores positivos del subyacente la opción vale cero, en contradicción con lo que postula la primera.

El trabajo se organiza de la siguiente forma. En la sección 2 se define la notación. En la sección 3 se presenta el modelo de Schwartz (1977). En la sección 4 se deduce una condición suficiente de no ejercicio anticipado y se demuestra la inconsistencia del modelo. En la sección 5 se proponen una reformulación en función del activo neto de dividendos y un planteamiento alternativo del modelo interpretando la opción descrita como una opción bermuda. Por último, la sección 6 recoge las conclusiones del trabajo.

2. Notación

Utilizaremos la siguiente notación:

$f(t_j, t_i)$ = valor en t_i de un bono sin riesgo que paga 1 unidad monetaria (u.m.) en t_j, con $t_i \leq t_j$.

r= tipo de interés sin riesgo.

d_i = pago o dividendo del activo subyacente en t_i, $i = 1, 2, ..., n$.

v_i^- = valor del activo subyacente en t_i^-; es decir, inmediatamente antes del pago d_i (valor *cum* dividendo).

$\alpha_i d_i$ = pérdida de valor del activo después del pago i-ésimo, $\alpha_i \in [0, 1]$.

v_i^+ = valor del activo subyacente en t_i^+; es decir, inmediatamente después del pago i-ésimo.

$v_i^+ = v_i^- - \alpha_i d_i$ (valor *ex* dividendo).

t_0 = momento en que se realiza la valoración.

T = fecha límite de ejercicio para las opciones americanas y fecha de ejercicio para las opciones europeas, $T = t_{n+1}$.

$\tau = T - t_0$, plazo de vencimiento.

k = precio de ejercicio de las opciones.

$C_a = C_a(v, \tau; k)$ = valor en τ de la opción de compra americana.

$C = C(v, \tau; k)$ = valor en τ de la opción de compra europea homóloga.

$C_{a_1} = \frac{\partial C_a}{\partial v}$, $C_{a_{11}} = \frac{\partial^2 C_a}{\partial v^2}$, $C_{a_t} = \frac{\partial C_a}{\partial t}$. De la misma forma se representan las derivadas parciales para la opción europea C.

α = rentabilidad instantánea esperada de la acción.

σ = variancia instantánea de la rentabilidad de la acción.

$z(t)$ = proceso estándar de Wiener.

3. El modelo de Schwartz (1977)

El modelo de Schwartz se refiere a la valoración de opciones de compra americanas sobre acciones que pagan dividendos discretos. A excepción de éstos, el marco teórico es el mismo que el definido en Black-Scholes (1973).

Se considera que entre dos fechas de pago de dividendos, la dinámica del valor de la acción sigue un proceso Browniano geométrico,

$$dv = \alpha v dt + \sigma v dz,$$

además, para simplificar la presentación pero sin pérdida de generalidad, asume que los dividendos son constantes y conocidos: $d_i = d \; \forall \; i = 1, ..., n$.

En estas condiciones, el valor de la opción entre dos fechas de pago de dividendos verificará la ecuación en derivadas parciales (EDP):

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 v^2 C_{a_{11}} + rvC_{a_1} - rC_a + C_{a_t}, \qquad [1]$$

sujeta a las condiciones de contorno-arbitraje siguientes:

· En la fecha de vencimiento T ($\tau = 0$) el valor de la opción será cero si $v < k$ o $v - k$ en caso contrario; es decir,

$$C_a(v, 0; k) = max\{0, v - k\}. \qquad [2]$$

· En cualquier instante, si la acción carece de valor, $v = 0$, entonces,

$$C_a(0, \tau; k) = 0 \; \forall \tau. \qquad [3]$$

· En cada fecha t en que la acción hace efectivo un dividendo se impone la condición siguiente: en el instante inmediatamente después del pago del dividendo el valor de la acción se reduce en la cuantía del dividendo; es decir, pasa de valer v en τ^+ a valer $v - d$ en τ^-. Puesto que la opción puede ejercerse en cualquier momento, pudiera ser que valiera más "muerta" justo antes del pago del dividendo que "viva" inmediatamente después; por tanto,

$$C_a(v, \tau^+; k) = max\{0, v - k, C_a(v - d, \tau^-; k)\}. \qquad [4]$$

Por último, cuando el precio de la acción tiende a infinito, la derivada parcial del valor de la opción respecto del valor de la acción tiende a uno[3],

$$\lim_{v \to \infty} C_{a_1}(v, \tau; k) = 1 \; \forall \tau. \qquad [5]$$

Fijémonos que la condición [1.4] presupone que el valor de la acción se reducirá exactamente en la cuantía del dividendo. Si este decremento

[3]La idea que subyace en la igualdad anterior es que $C_a(v, \tau; k) \geq C(v, \tau^*; k)$, siendo $\tau^* = t_i^- - t$ y t_i la primera fecha, después de t, en que se pagan dividendos Cuando $v \to \infty$, $C(v, \tau^*; k) \to v - ke^{-r\tau^*}$; como C_a es, entre dos fechas de pago de dividendos, una función convexa con respecto de v, para valores suficientemente grandes se mantendrá paralela a $v - ke^{-r\tau^*}$, ya que en caso contrario existirían valores de la acción, v, tales que $C_a < C$.

viniera expresado por $\alpha_j\, d$ con[4] $0 < \alpha_j < 1$, la condición se reescribiría

$$C_a(v, \tau^+; k) = max\{0, v - k, C_a(v - \alpha_j\, d, \tau^-; k)\}. \qquad [6]$$

4. Inconsistencia del modelo de Schwartz

Nuestra demostración de la inconsistencia del modelo de Schwartz (1977) requiere de un resultado de Kim (1987) que extiende el teorema 1 de Merton (1973 p. 54 I.C.E.) en términos de lo que él define como activo neto de dividendos.

DEFINICIÓN (KIM 1987). *Dado un activo A, el activo A neto de dividendos es un activo con las mismas características que el activo A al que se le ha quitado el derecho al cobro de los dividendos pagados en $[t_0, T]$, donde t_0 es el momento de la valoración.*

Si v representa el valor del activo A, el valor del activo neto de dividendos lo simbolizaremos por v^n.

PROPOSICIÓN 1 (KIM 1987).

$\forall\ v^n$, $max\{0, v^n - kf(T, t_0)\} \leq C \leq v^n$.

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos dos carteras: $C_A = \{C\}$ formada por la adquisición de una opción de compra europea y la cartera $C_B = \{v^n - k\, f(T, t_0)\}$ formada por la compra del activo subyacente neto de dividendos y tomar prestadas $k\, f(T, t_0)$ u.m. en t_0 con la obligación de devolver k u.m. en T.

En la fecha de vencimiento de la opción de compra, T, $v^n = v$ y el valor de las carteras será

$$C_B(T) = v - k \leq max\{0, v - k\} = C_A(T) \leq v.$$

En consecuencia, y para evitar una situación de arbitraje, en t_0 deben mantenerse las desigualdades. Puesto que $C \geq 0$ se tiene

$$max\{0, v^n - k\, f(T, t_0)\} \leq C \leq v^n.$$

[4] Esta hipótesis ha sido utilizada por Augros (1985 p. 84) y Roll (1977 p. 253).

4.1 Condición suficiente de no ejercicio anticipado para opciones de compra americanas

Obsérvese que la proposición 1 es una condición necesaria de consistencia interna para opciones de compra europeas. Obviamente, para poder aplicarla al modelo de Schwartz debemos plantear una situación en que la opción americana no se ejerza anticipadamente. La siguiente proposición nos da una condición suficiente de no ejercicio anticipado.

PROPOSICIÓN 2.

Si $\alpha_j\ d_j \leq k[1 - f(t_{j+1}^-, t_j^+)]\ \ \forall\ j = 1, ..., n$, *entonces la opción de compra americana no se ejercerá antes de* T.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que el activo subyacente sobre el que se ejerce la opción paga n dividendos desde el instante de la valoración, t_0, hasta la fecha límite de ejercicio de la opción, T.

La opción de compra americana se ejercerá en el intervalo $[t_0, t_1)$ si vale igual o más "muerta", justo antes del pago del dividendo[5] d_1, que "viva" inmediatamente después. Por tanto, se cumplirá[6]

$$v_1^- - k \geq C_a(v_1^+, T - t_1^+; k) \geq C(v_1^+, t_2^- - t_1^+; k) \geq max\{0, v_1^+ - kf(t_2^-, t_1^+)\}.$$

En consecuencia,

$$v_1^- - k \geq max\{0, v_1^- - \alpha_1 d_1 - kf(t_2^-, t_1^+)\}.$$

Análogamente, la opción se ejercerá en $[t_1, t_2)$ si

$$v_2^- - k \geq max\{0, v_2^- - \alpha_2 d_2 - kf(t_3^-, t_2^+)\}.$$

En general, la opción se ejercerá en $[t_{j-1}, t_j)$ si

$$v_j^- - k \geq max\{0, v_j^- - \alpha_j\ d_j - kf(t_{j+1}^-, t_j^+)\},$$

[5]En el teorema 2 de Merton (1973 p. 55 I.C E.) se demuestra que en ausencia de dividendos una opción de compra americana vale más "viva" que "muerta".

[6]Sea $C(v_1^+, t_2^- - t_1^+; k)$ el valor de una opción de compra europea con vencimiento en t_2^-, justo antes del pago del dividendo, y con precio de ejercicio k.

Como en $[t_1^+, t_2^-]$ el activo subyacente no paga dividendos, por el teorema 1 de Merton (1973 p. 54 I.C.E.) se cumple la desigualdad.

$$C(v_1^+, t_2^- - t_1^+; k) \geq max\{0, v_1^+ - kf(t_2^-, t_1^+)\}.$$

de donde,

$$v_j^- - k \geq v_j^- - \alpha_j\, d_j - kf(t_{j+1}^-, t_j^+),$$

o, de forma equivalente,

$$\alpha_j\, d_j \geq k[1 - f(t_{j+1}^-, t_j^+)]. \qquad [7]$$

Es decir, si la opción se ejerce en el período $[t_{j-1}, t_j)$, entonces se verifica la desigualdad [2]; por tanto, es *condición suficiente* para que la opción no se ejerza antes de T que $\forall\, j = 1, ..., n$ se cumpla

$$\alpha_j\, d_j < k[1 - f(t_{j+1}^-, t_j^+)]. \qquad [8]$$

La expresión [8] tiene una clara interpretación económica: si no ejercemos la opción en t_j^- disponemos de k u.m. para invertir durante el periodo (t_j^+, t_{j+1}^-) puesto que durante el mismo no se ejercerá. El valor actualizado de los beneficios obtenidos invirtiendo las k u.m. durante este intervalo es $k[1 - f(t_{j+1}^-, t_j^+)]$ y la pérdida del valor del subyacente después del pago j-ésimo es $\alpha_j\, d_j$. Por tanto, si las pérdidas son inferiores a los beneficios es preferible mantener viva la opción.

Si consideramos el caso particular: $\alpha_j = \alpha$, $d_j = d$, $t_{j+1} - t_j = \tau$ constantes $\forall j$ y el tipo de interés sin riesgo constante en $[t_0, T]$ e igual a r, la expresión [8] queda de la forma

$$\alpha\, d < k[1 - e^{-r\,\tau}]. \qquad [9]$$

4.2 Inconsistencia del modelo

Para probar la inconsistencia del modelo vamos a determinar, en primer lugar, en qué condiciones la opción americana vale más "viva" que "muerta", en cuyo caso valdrá lo mismo que su homóloga europea. Para hacerlo nos apoyaremos en la condición [9].

Supongamos que $\alpha_j = 1$, $\forall j$ y $\tau = t_{j+1} - t_j$ constante $\forall j$, entonces, la expresión [9] queda $d < k[1 - e^{-r\tau}]$, lo que equivale a

$$k > \frac{e^{r\tau}}{e^{r\tau} - 1} d. \qquad [10]$$

Sea $k_1 = \frac{e^{r\tau}}{e^{r\tau}-1} d$ y consideremos una opción americana cuyo valor viene expresado por $C_a(v, \tau; k)$ con $k > k_1$. Puesto que se cumple la condición suficiente [10] de no ejercicio anticipado, el valor de la opción americana coincidirá con el de su homóloga europea, $C_a(v,\tau;k) = C(v,\tau;k)$, y por la proposición 1 se tendrá

$$max\{0, v^n - kf(T,t_0)\} \leq C_a \leq v^n. \qquad [11]$$

Supongamos que estamos situados en t_1^- $(\tau^+ = T - t_1^-)$, justo antes del pago de los dividendos $(n > 1)$; el valor actual de los mismos es VAD $= \frac{1-e^{-nr\tau}}{e^{r\tau}-1}e^{r\tau}d$. Si $v =$ VAD, entonces $v^n = 0$ y de la desigualdad [11] se deduce que $C_a = 0$ para que no exista arbitraje.

Veamos qué valor le asigna el modelo a la opción. Por la condición [4]

$$C_a(v,\tau^+;k) = max\{0, v - k, C_a(v - d, \tau^-;k)\}. \qquad [12]$$

Obsérvese que al haber considerado d constante y $v =$ VAD se verifica $v < k$[7]. Para demostrar la inconsistencia interna del modelo bastará con probar que $C_a(v - d, \tau^-;k) > 0$ si y sólo si $v - d > 0$.

La EDP [1] sujeta a [2], [3], [4] y [5] no tiene solución analítica y debe resolverse por métodos numéricos[8]. Nuestra demostración, al basarse en un argumento de arbitraje, no necesita una fórmula explícita para el valor de la opción.

PROPOSICIÓN 3.

Sean t_{j-1} y t_j dos fechas consecutivas de pago de dividendos y $C_a(v,\tau;k)$ el valor de una opción americana de compra según el modelo de Schwartz (1977); si el modelo es consistente con la hipótesis de no arbitraje, entonces, $\forall\ t \in (t_{j-1}, t_j^-)$, $C_a(v,\tau;k) > 0 \Leftrightarrow v > 0$ con $\tau = T - t$.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que estamos situados en $t \in (t_{j-1}, t_j^-)$. Sea $C(v,\tau_j^+;k)$, con $\tau_j^+ = t_j^- - t$, el valor de una opción europea de compra con vencimiento en t_j^-, justo antes del pago del dividendo j-ésimo.

Si $C_a(v,\tau;k) < C(v,\tau_j^+;k)$, entonces el modelo es inconsistente.

Supongamos que se verifica la desigualdad $C_a(v,\tau;k) \geq C(v,\tau_j^+;k)$. Según el modelo , si $v = 0$, entonces $C_a(v,\tau;k) = 0$, por la condición [3]; bastará, por tanto, demostrar que si $v > 0$, entonces $C(v,\tau_j^+;k) > 0$.

[7] En efecto, si $v = \frac{1-e^{-nr\tau}}{e^{r\tau}-1}e^{r\tau}d$ y $k_1 = \frac{e^{r\tau}}{e^{r\tau}-1}d < k$, $v < k_1 \Leftrightarrow 1 - e^{-nr\tau} < 1$, lo cual es cierto ya que $\tau > 0$, $n > 0$ y $r > 0$

[8] Schwartz la resuelve mediante un algoritmo basado en las diferencias finitas.

El modelo de Schwartz presupone que $\forall t \in (t_{j-1}, t_j)$ la dinámica del valor de la acción sigue un proceso geométrico, $dv = \alpha v dt + \sigma v dz$; en consecuencia, $\forall t \in (t_{j-1}, t_j)$ la función $C(v, \tau_j^+; k)$ responderá a la EDP, $0 = \frac{1}{2}v^2\sigma^2 C_{11} + rvC_1 - rC + C_t$. Además, la hipótesis de ausencia de arbitraje impone las dos condiciones siguientes: $C(0, \tau_j^+; k) = 0$ y $C(v, 0; k) = max\{0, v - k\}$. La función $C(v, \tau_j^+; k)$ tiene como solución la fórmula de Black-Scholes, $C = v\Phi(d_1) - ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$, que es estrictamente positiva si el valor del activo subyacente lo es[9],$v > 0 \Leftrightarrow C(v, \tau_j^+; k) > 0$.

Retomando la expresión [12] tenemos que $C_a(v - d, \tau^-; k) > 0$ ya que $v - d > 0$ al haber considerado $n > 1$ y la fecha de valoración justo antes del pago del dividendo; violándose la condición [11].

La demostración de la inconsistencia del modelo para $\alpha \in (0, 1]$ y política de dividendos variable pero conocida es inmediata. Aún en el caso en que $\alpha > 1$, si el valor de la acción en t_j^- es $v = \text{VAD}(t_j^-)$ y se cumple que $v - \alpha d_j > 0$, entonces el modelo sigue siendo inconsistente.

5. Propuesta de reformulación del modelo de Schwartz (1977)

Nuestra reformulación se basa en el cambio de variable propuesto por Kim (1987), es decir, plantear el valor de la opción en función del activo neto de dividendos: $C_a = C_a(v^n, \tau; k)$.

Suponiendo que dv^n sigue un proceso geométrico, el valor de la opción será la solución a la EDP

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2(v^n)^2 C_{a_{11}} + rv^n C_{a_1} - rC_a + C_{a_t} \qquad [13]$$

sujeta a

$$C_a(v^n, 0; k) = max\{0, v - k\}, \qquad [14]$$

$$C_a(0, \tau; k) = 0 \; \forall \; \tau, \qquad [15]$$

$$C_a(v^n, \tau^+; k) = max\{0, v - k, C_a(v^{n-1}, \tau^-; k)\}, \qquad [16]$$

$$\lim_{v^n \to \infty} C_{a_1}(v^n, \tau; k) = 1 \; \forall \tau. \qquad [17]$$

Veamos si esta reformulación corrige la contradicción teórica.

[9] En la fórmula de Black-Scholes el valor de la opción crece con el de la acción: $C_1 = \Phi(d_1) > 0$. Además, si $v \to 0 \Rightarrow C \to 0$, de donde se deduce que si $v > 0 \Rightarrow C > 0$.

Obsérvese que en la situación particular en que hemos estudiado la inconsistencia, el valor de la opción vendrá determinado por la EDP [13] sujeta a [14] y [15], cuya solución es la conocida fórmula de Black-Scholes sustituyendo v por v^n.

Para $v^n = 0$ la opción no tendrá valor, $C_a = 0$, tal como postula la proposición 1.

La argumentación de la proposición 3 en este contexto[10] sería la siguiente: supongamos que estamos situados en $t \in (t_{j-1}, t_j^-)$ y sea $C(v, \tau_j^+; k)$, con $\tau_j^+ = t_j^- - t$, el valor de una opción europea de compra con vencimiento en t_j^-. En ausencia de arbitraje, el valor de esta opción debe ser menor o igual que el valor de una opción de compra sobre el mismo subyacente y con vencimiento en T. Puesto que tomamos como variable explicativa el subyacente neto y suponemos que su dinámica viene descrita por un proceso geométrico, para v =VAD el valor de la opción será nulo ya que $v^n = 0$. Por tanto, $C_a = C(v, \tau_j^+; k) = 0$.

Un planteamiento alternativo sería valorar la opción americana como una opción bermuda. En efecto, puesto que la opción paga dividendos en un número finito de instantes temporales y, como demostrara Merton (1973 p. 55 ICE), entre dos fechas de pago no se ejercerá, podemos interpretar la opción americana como una opción de compra bermuda que permite el ejercicio justo antes de cada fecha de pago de dividendos y sobre una acción cuya dinámica viene descrita por un proceso mixto de difusión y saltos. Existen fórmulas cerradas para valorar opciones bermuda cuando el subyacente no paga dividendos y sigue un proceso geométrico[11]; sin embargo, no hemos encontrado en la literatura financiera expresiones para el caso de un proceso mixto. Esta podría ser una línea para futuros análisis. Pueden verse aproximaciones algorítmicas a este problema en Dewynne-Howison-Wilmott (1997 pp. 332 y 333).

6. Conclusiones

El objeto de estudio de este trabajo ha consistido en demostrar que el modelo de Schwartz (1977) de valoración de opciones de compra americanas sobre acciones que pagan dividendos en un número finito

[10] Obsérvese que aquí consideramos que dv^n sigue un proceso geométrico, lo cual no implica, necesariamente, que entre dos fechas de pago dv siga un proceso de estas características.

[11] Ver Leguey-Llerena (1998).

de instantes temporales viola la hipótesis de ausencia de arbitraje sobre la que se fundamenta. Este resultado extrapola los de Kim (1987) sobre la inconsistencia interna del modelo de Merton (1973) en el que se consideran opciones de compra europeas sobre acciones con pago continuo de dividendos.

El argumento que invalida el modelo de Schwartz se apoya en dos condiciones necesarias, incompatibles entre sí, para evitar el arbitraje. Por un lado, la proposición 1 (Kim 1987) establece como límites de arbitraje para una opción europea de compra sobre acciones que pagan dividendos (de forma continua o discreta) las desigualdades $max\{0, v^n - kf(T, t_0\} \leq C \leq v^n$. Por otro, la proposición 3 establece que entre dos fechas consecutivas de pago de dividendos el valor de la opción americana descrita en el modelo de Schwartz debe ser estrictamente positivo si, y sólo si, lo es el del subyacente, $C_a(v, \tau; k) > 0 \Leftrightarrow v > 0$. Estas dos proposiciones, referidas a opciones europeas y americanas, respectivamente, están relacionadas por la proposición 2, $\alpha_j\, d_j \leq k[1 - f(t_{j+1}^-, t_j^+)]\ \ \forall\, j = 1, ..., n$, que es una condición suficiente de no ejercicio anticipado. La conjunción de estos tres resultados permite demostrar su inconsistencia.

El modelo de Schwartz (1977) no tiene solución analítica y debe resolverse mediante algoritmos numéricos. Sin embargo, nuestro tratamiento, al basarse en un argumento de arbitraje, no precisa de una fórmula explícita para el valor de la opción y demuestra que el modelo es estructuralmente incorrecto.

Para eliminar la contradicción teórica se propone reformular el modelo utilizando como variable independiente el valor del activo neto de dividendos. En las condiciones particulares en que se ha planteado la inconsistencia, el modelo tiene como solución la conocida fórmula de Black-Scholes (1973) sustituyendo v por v^n. Un planteamiento alternativo sería interpretar la opción como una opción de compra bermuda sobre un activo subyacente que realiza pagos en un número discreto de instantes temporales y cuya dinámica viene descrita por un proceso mixto de difusión y saltos. Si bien existen aproximaciones algorítmicas a este problema, no hemos encontrado expresiones cerradas para valorar este tipo de opción en el caso particular de un proceso mixto.

Referencias

Augros, J.C. (1985), *Finance. Options et obligations convertibles* ed. Economica, París.

Black, F. y M. Scholes (1973): "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy* 81, pp. 637-654. Traducido en Cuadernos Económicos de ICE, 1986/1, pp. 33-50.

Dewynne J., S. Howison y P. Wilmott (1997): "Option pricing: mathematical models and computation", Oxford Financial Press, Oxford.

Ingersoll, J.E.Jr. (1977): "A contingent-claims valuation of convertible securities", *Journal of Financial Economics* 4, pp. 289-322.

Jones, E.P., y P.S. Mason (1980): "Valuation of loan guarantees", *Journal of Banking and Finance* 4, pp. 89-107.

Kim. I.J. (1987): "Essays on the valuation of contingent claims", Tesis Doctoral, Columbia University.

Leguey, S. y F. Llerena (1998): "Valoración de opciones de compra bermuda con precios de ejercicio variables", *Revista Española de Economía* 15, pp. 199-216.

Llerena, F. (1996): "Estudio crítico de la modelización del valor de las opciones de compra. Aplicaciones", Tesis Doctoral, Universitat Rovira i Virgili.

Merton, R.C. (1973): "Theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science* pp. 141-183. Traducido en Cuadernos Económicos de ICE, 1986/1, pp. 51-95.

New Palgrave, The (1988): "", *A dictionary of economics* .

Londres, The Mac-Millan Press Limited

Roll, R. (1977): "An analytic valuation formula for unprotected american call options on stocks with know dividends", *Journal of Financial Economics* 5, pp. 251-258.

Schwartz, E.S. (1977): "The valuation of warrants: implementing a new approach", *Journal of Financial Economics* 4, pp. 79-93.

Abstract

This paper extends the Kim's (1987) results, about the Merton's (1973) model inconsistency of the valuation of European call options on assets with a continuos dividend payment, to American call options on assets that pay a finite number of dividens. In particular, it demonstrates that the Schwartz's (1977) model violates the non-arbitrage condition on which it is based. It proposes a reformulation of the model according to the asset net of dividends and an alternative interpretation of the described option as a bermuda option.

Keywords: arbitrage, internal inconsistency, option.

Recepción del original, marzo de 1998
Versión final, mayo de 1999