INVESTIGACIONES ECONÓMICAS. vol. XXXI (1), 2007, 191-217

# DOS FAMILIAS NUMERABLES DE MEDIDAS DE DESIGUALDAD

LUIS JOSÉ IMEDIO OLMEDO
ELENA BÁRCENA MARTÍN
*Universidad de Málaga*

*En este trabajo se estudian dos familias numerables de índices de desigualdad que se obtienen como transformaciones lineales de los momentos respecto del origen de la curva de Lorenz y de su curva dual, al considerar tales curvas como funciones de distribución. Se presenta una visión unificada de ambas familias, tratando de clarificar su paralelismo y divergencia. En el ámbito normativo, se obtienen las funciones de preferencia social que relacionan bienestar y desigualdad. Ello permite, por una parte, analizar su grado de aversión a la desigualdad y, por otra, establecer las condiciones bajo las cuales los índices satisfacen el Principio de Transferencias Decrecientes y/o su versión posicional.*

*Palabras clave: Caracterización de la curva de Lorenz, aversión a la desigualdad, principios de transferencias.*

(*JEL* C10, D31, I38)

## 1. Introducción

La ordenación inducida sobre un conjunto de distribuciones de renta, en términos de desigualdad relativa, a través de la relación de dominancia entre sus curvas de Lorenz asociadas es un orden parcial, ya que no permite concluir cuándo tales curvas tienen algún punto de intersección en el interior del intervalo [0, 1]. En ese caso se recurre a criterios de dominancia más débiles[1] o se utilizan medidas escalares de desigualdad.

La segunda de esas opciones es la más habitual en el trabajo empírico. La medida de desigualdad más utilizada es el índice de Gini (1912),

[1] Véase, por ejemplo, Shorrocks y Foster (1987), Dardanoni y Lambert (1988) o Zoli (1999).

cuyo valor es el doble del área entre la curva de Lorenz y la línea de equidistribución. Como ningún índice puede reflejar todos los aspectos que, sobre la desigualdad, incorpora la curva de Lorenz, existe acuerdo sobre la conveniencia del uso conjunto de varios de ellos. La práctica más frecuente consiste en combinar el índice de Gini con índices de la familia de Atkinson (1970) y/o índices de Entropía Generalizada (Shorrocks (1980)). Ese modo de proceder presenta algunos inconvenientes. Se trata de índices cuyo fundamento teórico es muy dispar[2], lo que dificulta evaluar su capacidad como medidas complementarias de desigualdad. Por otra parte, ninguno de los índices citados, excepto el de Gini, admite una expresión sencilla a partir de la curva de Lorenz, por lo que no está claro hasta qué punto pueden contribuir a proporcionar información sobre sus características.

Es deseable, por lo tanto, disponer de familias de medidas de desigualdad de naturaleza homogénea tales que un número finito de ellas proporcione información suficiente sobre las características de la curva de Lorenz y que, a la vez, incorporen distintos juicios de valor sobre la desigualdad. Estas condiciones las satisfacen los índices de las dos familias objeto de estudio en este trabajo.

Los elementos de estas dos familias se definen como transformaciones lineales de los momentos, respecto al origen, de la curva de Lorenz y de su curva dual, respectivamente. Para ello, ambas curvas se consideran como funciones de distribución, dado que cumplen las condiciones formales necesarias (tienen carácter acumulativo, son crecientes y su recorrido es el intervalo $[0, 1]$). Los índices obtenidos coinciden con los propuestos por Aaberge (2000) y los Gini generalizados (Donaldson y Weymarck (1980), Yitzhaki (1983)) cuando el rango del parámetro que interviene en su definición es el conjunto de los enteros positivos. Se trata, por lo tanto, de índices bien conocidos en la literatura. Sin embargo, la forma en que aquí se introducen facilita la obtención de algunos resultados y permite un tratamiento conjunto de dos familias de índices que presentan propiedades comunes y un claro paralelismo formal, pero que al mismo tiempo difieren y se complementan desde el punto de vista normativo.

El objetivo de este trabajo es presentar una visión unificada de estas dos familias de medidas de desigualdad, tratando de clarificar sus ana-

[2] En Newbery (1970) se ponen de manifiesto las diferencias, en cuanto a fundamentación, entre el índice de Gini y los de Atkinson. Por su parte, los índices de entropía proceden de la teoría de la información.

logías y divergencias. Cada una de ellas caracteriza la distribución de rentas, fijada la renta media. Ambas generalizan el coeficiente de Gini ordinario y sus elementos son medidas lineales de desigualdad en el sentido propuesto por Mehran (1976), lo que implica que pueden obtenerse ponderando la desigualdad local existente en cada percentil de renta. Sus distintos esquemas de ponderación generan distintas actitudes en la valoración de la desigualdad a lo largo de la distribución.

Para hacer explícitos algunos de los aspectos normativos presentes en estas medidas, se obtienen, siguiendo el enfoque de Yaari (1987), sus respectivas distribuciones de preferencias sociales que permiten relacionar bienestar y desigualdad. A partir de ellas se establece que ambas familias están ordenadas de forma monótona según su grado de aversión a la desigualdad y que consideradas conjuntamente cubren todo el espectro, desde la indiferencia hasta la aversión máxima o leximin rawlsiano.

También se analizan las condiciones bajo las cuales los índices de estas familias satisfacen distintos principios de transferencias. Al ser Lorenz-consistentes, cumplen el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton (PT). Su comportamiento frente a principios que incorporan criterios redistributivos más exigentes depende de las propiedades de sus distribuciones de preferencias, caso del Principio Posicional de Transferencias (PPT), o de la relación entre dichas propiedades y las de la distribución de la renta sobre la que se aplica el índice, caso del Principio de Transferencias Decrecientes (PTD). Los elementos de una de las familias, excepto el índice de Gini, satisfacen el PPT. Sin embargo, el PTD no lo verifica, para una distribución cualquiera, ninguna de las dos familias, aunque sí lo cumplen algunos de sus elementos para modelos concretos o para distribuciones truncadas.

El artículo sigue el siguiente esquema. En la Sección segunda, tras establecer el marco de análisis y hacer referencia a un conjunto de conceptos y de resultados previos que faciliten la lectura posterior, se introducen las dos familias de índices y se analizan sus propiedades estadísticas. Los aspectos normativos se abordan en la Sección tercera, previa obtención de las funciones de preferencia social. El grado de concavidad de dichas funciones determina la actitud de sus índices asociados respecto a la desigualdad. En la Sección cuarta se presentan algunos resultados sobre los principios de transferencias y se aplican a los elementos de ambas familias. Para ilustrar su respuesta frente al PTD se considera la distribución del ingreso equivalente individual en España para el año 2000, estimada de forma no paramétrica, así como varias distribuciones teóricas, algunas de las cuales se utilizan para modelizar las observadas. Por último, se sintetizan los resultados obtenidos y se incluyen algunos comentarios.

## 2. Dos familias de índices de desigualdad. Definición y análisis estadístico

Supondremos que la distribución de la renta en una población está representada por la variable aleatoria continua, X, cuyo recorrido es la semirrecta real positiva, $R^{+} = (0, \infty)$, siendo F su función de distribución[3], y $\mu = E(X) = \int_0^\infty x dF(x)$ su renta media.

La curva de Lorenz asociada, $L(p)$, $p = F(x)$, se define mediante:

$$L : [0,1] \longrightarrow [0,1]\,,\ L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^x s dF(s)\,,\ 0 < p < 1,$$

siendo $L(0) = 0$ y $L(1) = 1$. Para cada $p = F(x)$, $L(p)$ es la proporción del volumen total de renta que acumula el conjunto de unidades con renta menor o igual que $x$. Es evidente que para $0 \leq p \leq 1$ es $L(p) \leq p$, siendo $L(p) = p$ en caso de equidistribución y $L(p) = 0$ para $0 \leq p < 1$, si la concentración es máxima.

La curva de Lorenz dual, $L^{*}(p)$, $p = F(x)$, se define como:

$$L^{*} : [0,1] \longrightarrow [0,1]\,,\ L^{*}(p) = 1 - L(1-p)\,,$$

por lo que $L^{*}(0) = 0$, $L^{*}(1) = 1$ y $L^{*}(p) \geq p$, siendo válida la igualdad si la distribución es igualitaria, mientras que $L^{*}(p) = 1$, $0 < p \leq 1$, si la concentración es máxima. Para cada $p$, $L^{*}(p)$ es la proporción del volumen total de renta que acumula el conjunto de unidades con renta mayor o igual que $y$, siendo $F(y) = 1 - p$.

Es inmediato que la curva $L(p)$ es creciente y convexa, mientras que $L^{*}(p)$ es creciente y cóncava, y que la función de densidad de la distribución de la renta se obtiene a partir de la curvatura de la curva de

[3] Suponer la continuidad de X facilita el tratamiento analítico. Los resultados obtenidos siguen siendo válidos para el caso discreto, pero la demostración de algunos de ellos es más laboriosa.

Lorenz o de su curva dual, dada la renta media[4]. Por lo tanto, cada una de estas curvas caracteriza la distribución de la renta.

Como consecuencia de sus propiedades, tanto la curva de Lorenz asociada a una distribución F como su curva dual pueden ser consideradas funciones de distribución. Sus respectivos momentos de orden $h \in N = \{1, 2, ..., n, ...\}$, respecto al origen, vendrán dados por:

$$\begin{aligned} M_h &= \int_0^1 p^h dL(p), \\ M_h^* &= \int_0^1 p^h dL^*(p). \end{aligned} \qquad [1]$$

Integrando por partes, las expresiones anteriores son equivalentes a:

$$\begin{aligned} M_h &= 1 - h\int_0^1 p^{h-1} L(p)\, dp, \\ M_h^* &= h\int_0^1 (1-p)^{h-1} L(p)\, dp. \end{aligned} \qquad [2]$$

Las funciones $L(p)$ y $L^*(p)$ quedan caracterizadas, respectivamente, por los conjuntos $\{M_h\}_{h\in N}$ y $\{M_h^*\}_{h\in N}$, ya que una distribución queda unívocamente determinada por el conjunto de sus momentos respecto del origen, cuando éstos existen (Kendall, Stuart y Ord (1994), cap. 4).

Es inmediato que $M_h$ y $1 - M_h^*$ son índices de desigualdad Lorenz-consistentes[5]: si $X$ e $Y$ son dos distribuciones de renta tales que $L_X(p) \geq L_Y(p), 0 \leq p \leq 1$, entonces se verifica $M_{X,h} \leq M_{Y,h}$, $1 - M_{X,h}^*$

[4] Basta tener en cuenta las igualdades:

$$\frac{dL(p)}{dp} = \frac{x}{\mu}, \frac{d^2L(p)}{dp^2} = \frac{1}{\mu f(x)}, 0 < p = F(x) < 1,$$
$$\frac{dL^*(p)}{dp} = \frac{y}{\mu}, \frac{d^2L^*(p)}{dp^2} = -\frac{1}{\mu f(y)}, 0 < 1 - p = F(y) < 1,$$

[5] En Foster (1985) se caracterizan este tipo de medidas. Son índices relativos que satisfacen las siguientes propiedades: Simetría (invariantes frente a permutaciones de renta entre los individuos), Principio de Población de Dalton (invariantes frente

$\leq 1 - M^*_{Y,h}$. Sin embargo, el recorrido de $M_h$ es $\left[\frac{1}{h+1}, 1\right]$, mientras que el de $1 - M^*_h$ es $\left[\frac{h}{h+1}, 1\right]$, ambos dependen de $h$, lo que supone un inconveniente de tipo práctico, a efectos comparativos, en su aplicación como índices de desigualdad. Esta limitación es fácilmente evitable mediante una transformación lineal de los mismos.

Definición. Para cada $h \in N$, sean:

$$I_h = \frac{h+1}{h} M_h - \frac{1}{h}, I^*_h = 1 - (h+1) M^*_h. \qquad [3]$$

Se comprueba fácilmente que $I_h$ e $I^*_h$ conservan la consistencia con el criterio de ordenación de Lorenz y que su recorrido común es, para todo $h \in N$, el intervalo $[0, 1]$, siendo nulos en caso de equidistribución e iguales a la unidad si la concentración es máxima.

A partir de [2] y [3] se obtienen sus expresiones en función de la curva de Lorenz:

$$I_h = (h+1) \int_0^1 p^{h-1} (p - L(p))\, dp = 1 - (h+1) \int_0^1 p^{h-1} L(p)\, dp, \qquad [4]$$

$$\begin{aligned} I^*_h &= 1 - h(h+1) \int_0^1 (1-p)^{h-1} L(p)\, dp = \\ &= h(h+1) \int_0^1 (1-p)^{h-1} (p - L(p))\, dp. \end{aligned} \qquad [5]$$

Para $h = 1$ resulta, en ambos casos, el índice de Gini ordinario, G:

$$I_1 = I^*_1 = G = 2 \int_0^1 (p - L(p))\, dp.$$

La familia $\Im = \{I_h\}_{h \in N}$ fue propuesta por Aaberge (2000), mientras que $\Im = \{I^*_h\}_{h \in N}$ es el conjunto de índices de Gini generalizados para

a réplicas exactas de la población), Principio de Transferencias de Pigou-Dalton (PT) (si tiene lugar una transferencia de renta desde un individuo hacia otro con menor nivel de renta, sin que varíe la ordenación relativa entre ambos -transferencia progresiva-, el valor de los índices disminuye).

los valores enteros positivos del parámetro que interviene en su definición[6].

Dado que tanto el conjunto de momentos $\{M_h\}_{h\in N}$ como el conjunto $\Im$ determinan de forma unívoca la curva de Lorenz, $L(p)$, y ésta junto a la renta media determina, a su vez, la distribución de la renta, $\Im$ caracteriza dicha distribución, fijada su media. La misma conclusión es válida para la familia $\Im^*$. Estas consideraciones se recogen en la siguiente proposición.

Proposición 1. Dada una distribución de renta con media positiva, cada uno de los conjuntos numerables $\Im = \{I_h\}_{h\in N}$ y $\Im^* = \{I_h^*\}_{h\in N}$, cuyos elementos son índices de desigualdad consistentes con el criterio de ordenación de Lorenz, caracteriza dicha distribución[7].

El siguiente resultado proporciona una relación entre los índices de ambas familias y prueba que cualquier elemento de una de ellas se puede expresar a partir de los elementos de la otra.

Proposición 2. Cada índice del conjunto $\Im^*$ se puede expresar como combinación lineal de índices de la familia $\Im$, y recíprocamente.

[6] Yitzhaki (1983) los define como $G(\beta) = 1 - \beta(\beta+1)\int_0^1 (1-p)^{\beta-1} L(p)\,dp$, siendo $\beta > 0$ un parámetro real. Por lo tanto, $I_h^* = G(h)$. Aunque en nuestra definición ambas familias de índices son numerables, desde el punto de vista formal no hay inconveniente en extender el campo de variación del parámetro al conjunto de los números reales positivos.

[7] Se ha demostrado que los índices de Gini generalizados se pueden obtener como transformaciones lineales de los momentos de la curva de Lorenz dual asociada a la distribución de rentas. Ello permite afirmar que el conjunto de índices asociados a los valores enteros positivos del parámetro caracteriza la distribución. A este resultado, que se obtiene de forma sencilla con el enfoque aquí adoptado, no se llega en los trabajos de Donaldson y Weymarck (1980) y de Yitzhaki (1983).

DEMOSTRACIÓN. A partir de [5], utilizando la fórmula del binomio de Newton, resulta:

$$I_h^* = 1 - h(h+1)\int_0^1 (1-p)^{h-1} L(p)\,dp =$$
$$= 1 - h(h+1)\sum_{i=1}^{h}(-1)^{i-1}\binom{h-1}{i-1}\int_0^1 p^{i-1}L(p)\,dp =$$
$$= 1 + (h+1)\sum_{i=1}^{h}(-1)^{i}\,i\binom{h}{i}\int_0^1 p^{i-1}L(p)\,dp,$$

y teniendo en cuenta [4], se obtiene:

$$I_h^* = 1 + (h+1)\sum_{i=1}^{h}(-1)^{i}\binom{h}{i}\frac{i}{i+1}(1-I_i)\,, h \in N. \qquad [6]$$

La igualdad anterior también permite expresar, de modo iterativo, cada $I_h$ como combinación lineal de los $I_i^*, i \leq h$. $\square$

En particular, para los tres primeros índices de cada familia se tiene:

$$\begin{aligned} I_1^* &= I_1 = G \\ I_2^* &= 3I_1 - 2I_2 \qquad I_2 = \frac{3}{2}I_1^* - \frac{1}{2}I_2^* \\ I_3^* &= 6I_1 - 8I_2 + 3I_3 \qquad I_3 = 2I_1^* - \frac{4}{3}I_2^* + \frac{1}{3}I_3^*. \end{aligned}$$

Una práctica común en el análisis estadístico consiste en utilizar un número reducido de los momentos de una distribución (generalmente, los tres primeros), para resumir sus principales características (valor medio, dispersión y forma). En este sentido, los primeros elementos de $\Im$ o de $\Im^*$, lo que incluye al índice de Gini, al estar determinados por los primeros momentos de las curvas $L$ y $L^*$, respectivamente, proporcionan información relevante sobre la curva de Lorenz, de forma directa o a través de su curva dual.

Para poner de manifiesto que los índices de las familias $\Im$ y $\Im^*$ pertenencen a la clase de las medidas lineales introducidas por Mehran

(1976), basta escribir las expresiones [4] y [5] de $I_h$ e $I_h^*$ del siguiente modo:

$$I_h = \int_0^1 (p - L(p))\, w_h(p)\, dp, w_h(p) = (h+1)\, p^{h-1}, \qquad [7]$$

$$I_h^* = \int_0^1 (p - L(p))\, w_h^*(p)\, dp, w_h^*(p) = h\,(h+1)\,(1-p)^{h-1}. \qquad [8]$$

Si se considera la siguiente especificación biparamétrica (Duclos, 2000) del peso que se asigna a las diferencias de Lorenz $p - L(p)$, a lo largo de la distribución:

$$w(h,q,p) = \frac{h\,(h+1) \mid q-p \mid^{h-1}}{q^{h+1} + (h+q)\,(1-q)^h},$$

con $h \in N$ y $0 \leq q \leq 1$, se verifica $w(h,0,p) = w_h(p)$ y $w(h,1,p) = w_h^*(p)$. Esto es, los dos conjuntos de índices forman parte de una misma familia de medidas lineales de desigualdad. Sin embargo, el comportamiento de sus respectivos pesos es muy diferente excepto para $h = 1, w_1(p) = w_1^*(p) = 2$, caso que corresponde al índice de Gini en el que las diferencias de Lorenz se ponderan de manera uniforme a lo largo de la escala de rentas.

Si $h > 1, w_h(p)$ es una función estrictamente creciente de $p$. Con ello, el índice $I_h, h > 1$, al ir aumentando el nivel de renta asigna mayor peso a la desigualdad local representada por $p - L(p)$[8], dando mayor importancia a la desigualdad existente en las rentas altas. Por el contrario, para $h > 1$, $w_h^*(p)$ es una función estrictamente decreciente de $p$, por lo que el índice $I_h^*$ asigna mayor peso a la desigualdad existente en la cola inferior de la distribución y disminuye la ponderación al aumentar el nivel de renta.

Aunque no es el objeto de esta sección el entrar en valoraciones éticas, las consideraciones anteriores prueban que los índices de las familias $\Im$ y $\Im^*$ evalúan de distinta forma la desigualdad local a lo largo de la escala de rentas. Los elementos de $\Im$ dan mayor importancia a la desigualdad existente en las rentas altas, los de $\Im^*$ a la existente en las rentas bajas, mientras que el índice de Gini sirve de frontera entre

[8] Observése que $p - L(p)$ es la diferencia entre la participación que tendría el conjunto de individuos con renta menor o igual que $x$, en el volumen total de renta, si la distribución fuese igualitaria y su participación real en la distribución considerada.

ambos criterios y asigna una ponderación constante, para todo nivel de renta, a la diferencia entre la línea de equidistribución y la curva de Lorenz. Al estudiar el fundamento normativo de ambos conjuntos de índices, se justificará que sus funciones de bienestar asociadas incorporan diferentes grados de aversión a la desigualdad y se analizará el comportamiento de $I_h$ y de $I_h^*$ al aumentar el parámetro $h$.

Una característica que comparten los elementos de las familias de índices $\Im$ y $\Im^*$ es la de ser índices de compromiso[9].

PROPOSICIÓN 3. Los índices obtenidos al multiplicar $I_h$ e $I_h^*$, $h \in N$, por la renta media de la población, $\mu$, son índices absolutos, invariantes frente a cambios de origen en la distribución de la renta.

DEMOSTRACIÓN. Si $L_X(p)$ es la curva de Lorenz asociada a la variable $X$, la correspondiente a la variable $X+a, a>0$, viene dada por:

$$L_{X+a}(p) = \frac{1}{\mu_{X+a}} \left(\mu_X L_X(p) + ap\right).$$

Sustituyendo la expresión anterior en [4], mediante un cálculo directo se obtiene:

$$I_{h,X+a} = \frac{\mu_X}{\mu_{X+a}} I_{h,X}, \mu_{X+a} I_{h,X+a} = \mu_X I_{h,X}, \tag{9}$$

mientras que si se sustituye en [5] y se tiene en cuenta que $\int_0^1 (1-p)^{h-1}\, pdp = \frac{1}{h(h+1)}$, resulta:

$$I^*_{h,X+a} = \frac{\mu_X}{\mu_{X+a}} I^*_{h;X}, \mu_{X+a} I^*_{h,X+a} = \mu_X I^*_{h,X}. \tag{10}$$

En definitiva, $\Im_A = \{\mu I_h\}_{h\in N}$ y $\Im_A^* = \{\mu I_h^*\}_{h\in N}$ son dos familias numerables de medidas absolutas de desigualdad. □

Por construcción, los elementos de las familias $\Im$ y $\Im^*$ constituyen lo que en la literatura se conoce como “medidas objetivas de desigualdad”, cuyo interés se centra en la determinación del grado de concentración de las distribuciones sobre las que se aplican. En principio, presentan una clara diferencia con los llamados “índices éticos o normativos”. Estos miden la desigualdad en términos de la pérdida de

[9] Un índice relativo de desigualdad, $I$, se denomina de compromiso si $\mu I$ es un índice absoluto. Análogamente, un índice absoluto $J$ es de compromiso si $J/\mu$ es un índice relativo.

bienestar social debida a la dispersión de las rentas, por lo que para su definición es necesario utilizar alguna función de bienestar social, FBS en adelante, que incorpore de forma explícita un conjunto de juicios de valor.

Aunque la distinción entre medidas objetivas y normativas de desigualdad es importante desde el punto de vista conceptual, a partir del trabajo de Dalton (1920) y, sobre todo, de la aportación pionera de Atkinson (1970), es generalmente aceptado que en cualquier medida de dispersión de rentas subyace alguna noción de bienestar social, en el sentido de que incorpora criterios sobre el peso que se asigna a la desigualdad a lo largo de la escala de rentas.

En la sección siguiente se estudian algunos de los aspectos normativos que incorporan los elementos de $\Im$ y de $\Im^*$.

## 3. Aspectos normativos. Distribuciones de preferencias

En este trabajo las comparaciones de bienestar entre distribuciones de renta se realizan mediante la FBS propuesta por Yaari (1987, 1988). Dicha función es aditiva y lineal en las rentas, y las pondera según la posición o rango que las mismas asignan a los individuos en la distribución.

Si $F$ es la función de distribución de la renta y $\Phi$ es una función de distribución que representa las preferencias del evaluador social, la función de bienestar social de Yaari (FBSY) viene dada por:

$$W_\Phi (F) = \int_{R^+} x d\Phi (F(x)) = \int_0^1 F^{-1}(p)\, d\Phi(p), \qquad [11]$$

siendo $F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\}, 0 \leq p \leq 1$, la inversa de $F$, continua por la izquierda, que proporciona la renta de un individuo situado en el percentil $p$ de la distribución. Por lo tanto, $W_\Phi (F)$ depende tanto de la posición de los individuos en la distribución, como de sus rentas en términos absolutos[10].

[10] Ben Porath y Gilboa (1994) axiomatizan la FBSY para distribuciones discretas. En Zoli (1999) se demuestra que la dominancia en términos de la FBSY equivale a la dominancia estocástica inversa de Muliere y Scarsini (1989).

Si $\mu$ es la renta media asociada a $F$ y $L(p)$ su curva de Lorenz, integrando por partes se obtiene, a partir de [11], una expresión alternativa de $W_\Phi$:

$$W_\Phi(F) = \int_{R^+} x\Phi'(F(x))\, dF(x) = \mu \left[ \Phi'(1) - \int_0^1 \Phi''(p)\, L(p)\, dp \right]. \quad [12]$$

Una FBSY se puede interpretar como una función de bienestar abreviada[11] asociada a las medidas lineales de desigualdad definidas en Mehran (1976). En efecto, teniendo en cuenta que al ser $\Phi$ una distribución definida en [0, 1], verifica $\int_0^1 p\Phi''(p)\, dp = \Phi'(1) - 1$, resulta:

$$W_\Phi(F) = \mu\left[1 - I_\Phi(F)\right], \quad [13]$$

siendo:

$$I_\Phi(F) = \int_0^1 (p - L(p))\, w(p)\, dp, \quad w(p) = -\Phi''(p), \quad [14]$$

lo que proporciona una relación explícita entre la distribución de preferencias y el esquema de ponderación de las diferencias de Lorenz.

La expresión $\mu\left[1 - I_\Phi(F)\right]$ puede interpretarse también, aplicando el enfoque de Blackorby y Donaldson (1978), como la renta equivalente igualmente distribuida[12]. En tal caso, $\mu I_\Phi(F)$ mide la pérdida de bienestar social debida a la desigualdad.

A partir de [12] y de [13], se obtiene:

$$I_\Phi(F) = 1 - \frac{W_\Phi(F)}{\mu} = 1 - \frac{1}{\mu}\int_{R^+} x\Phi'(F(x))\, dF(x) = 1 - \Phi'(1) + \quad [15]$$

$$+ \int_0^1 \Phi''(p)\, L(p)\, dp,$$

[11] Se puede expresar a partir de la renta media y de una medida de desigualdad. Véase Lambert (2001, cap. 5).

[12] Es el nivel de renta que asignado por igual a todos los individuos de la población proporcionaría idéntico bienestar, según la FBS especificada, que la distribución existente. Este concepto es la base del enfoque AKS (Atkinson (1970), Kolm (1976), Sen (1973)) para relacionar bienestar y desigualdad.

de modo que $I_{\Phi}(F)$ es consistente con el criterio de ordenación de Lorenz si y sólo si la distribución de preferencias es estrictamente cóncava $\left(\Phi''(p) < 0\right)$. Aunque se trate de una cuestión menor, para que el rango de variación de $I_{\Phi}(F)$ sea el intervalo $[0,1]$ es necesario que $\Phi'(1) = 0$.

Según lo anterior, para proporcionar un fundamento normativo a los índices de las familias $\Im = \{I_h\}_{h \in N}$ y $\Im^* = \{I_h^*\}_{h \in N}$ se han de obtener sendas familias de funciones de preferencia, $\wp = \{\Phi_h\}_{h \in N}$ y $\wp^* = \{\Phi_h^*\}_{h \in N}$, para las cuales se debe cumplir:

$$I_h = 1 - \Phi_h'(1) + \int_0^1 \Phi_h''(p)\, L(p)\, dp, \qquad [16]$$

$$I_h^* = 1 - \Phi_h^{*\prime}(1) + \int_0^1 \Phi_h^{*\prime\prime}(p)\, L(p)\, dp, \qquad [17]$$

PROPOSICIÓN 4. Las familias de funciones de preferencia:

$$\begin{aligned} \Phi_h(p) &= \frac{1}{h}\left((h+1)\,p - p^{h+1}\right) \\ \Phi_h^*(p) &= 1 - (1-p)^{h+1}, h \in N, \end{aligned} \qquad [18]$$

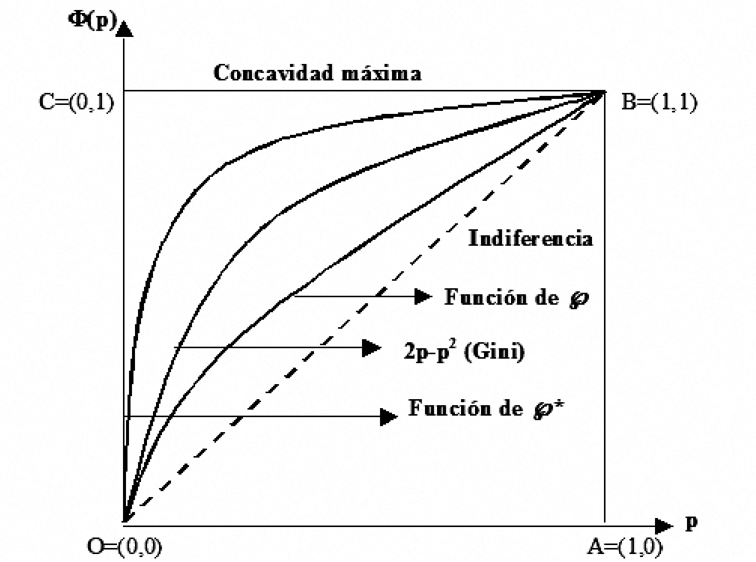
satisfacen, respectivamente, las condiciones [16] y [17] y, por lo tanto, proporcionan una justificación normativa a los índices de las familias $\Im$ y $\Im^*$.

DEMOSTRACIÓN. Basta imponer la condición [14] a las ponderaciones que aparecen en las expresiones [7] y [8] de los índices. Las constantes de integración se determinan al imponer que las distribuciones de preferencias pasen por los puntos (0,0) y (1,1). Por otra parte, es inmediato que $\Phi_h$ y $\Phi_h^*$ son estrictamente crecientes y estrictamente cóncavas en el intervalo (0, 1). □

Cada una de las familias de funciones obtenidas generaliza, de distinta forma, la función de preferencia asociada al coeficiente de Gini, ya que para $h = 1$ resulta $\Phi_1(p) = \Phi_1^*(p) = 2p - p^2, 0 < p < 1$ (Yaari, 1987).

La concavidad estricta de $\Phi_h$ y $\Phi_h^*$ prueba que los índices de las familias $\Im$ y $\Im^*$, así como las FBS consistentes con los mismos, presentan aversión a la desigualdad. Es más, las familias $\wp = \{\Phi_h\}_{h \in N}$ y $\wp^* = \{\Phi_h^*\}_{h \in N}$ están ordenadas de forma monótona según el grado de concavidad de sus elementos. Al aumentar $h$ las funciones de $\wp$ presentan menor concavidad, mientras que para las de $\wp^*$ sucede lo contrario[13]. La gráfica de la función de preferencias asociada al índice de Gini, $\Phi_1(p) = \Phi_1^*(p) = 2p - p^2$, separa ambas familias. En consecuencia, para $h \neq 1$ toda función de $\wp^*$ es más cóncava que cualquier función de $\wp$. Esta situación se pone de manifiesto en el siguiente gráfico.

GRÁFICO 1
Funciones de preferencia jerarquizadas según su grado de concavidad




El resultado anterior implica que los índices de $\Im = \{I_h\}_{h\in N}$ presentan una aversión decreciente a la desigualdad, mientras que para los de $\Im^* = \{I_h^*\}_{h\in N}$ sucede lo contrario. Ambas familias, consideradas conjuntamente, cubren todo el espectro de la aversión a la desigualdad, desde la indiferencia hasta la aversión máxima, como se pone de manifiesto al analizar su comportamiento en los casos extremos.

Al aumentar $h$, las funciones de $\wp$ convergen hacia la identidad en el intervalo $[0, 1]$, representada por la línea OB en la Gráfico 1: $\lim_{h\to\infty} \Phi_h\ (p) = p, 0 \leq p \leq 1$. En tal caso, el bienestar asociado a

[13] Ello es consecuencia de que todas las funciones de $\wp$ y de $\wp^*$ pasan por los puntos (0,0) y (1,1), junto con el hecho de que la sucesión $\wp = \{\Phi_h\}_{h\in N}$ es estrictamente decreciente en el intervalo (0, 1), mientras que $\wp^* = \{\Phi_h^*\}_{h\in N}$ es estrictamente creciente en dicho intervalo. Es decir:

$$\Phi_{h+1}(p) < \Phi_h(p), \Phi_{h+1}^*(p) > \Phi_h^*(p), 0 < p < 1, h \in N$$

cualquier distribución se identifica con su renta media: $\lim_{h\to\infty} W_{\Phi_h} = \int_{R^+} xdp = \mu$, y las transferencias progresivas no tienen incidencia sobre el bienestar. Para la medida de desigualdad correspondiente se verifica: $\lim_{h\to\infty} I_h = 0$, no porque la distribución de la renta sea igualitaria sino debido a que la FBS asociada es indiferente a la desigualdad.

Las funciones de $\wp^*$, cuya concavidad es creciente, convergen hacia CB, excluido el punto C: $\lim_{h\to\infty} \Phi_h^*(p) = \{0, p = 0 \quad 1, 0 < p \leq 1$, función que presenta la concavidad máxima. En este caso el bienestar se identifica con la renta mínima de la distribución: $\lim_{h\to\infty} W_{\Phi_h^*} = x_m$, de manera que para la FBS sólo son relevantes las transferencias de renta dirigidas hacia el individuo más pobre de la población, postura que corresponde al denominado leximin rawlsiano[14]. Para el índice de desigualdad, resulta: $\lim_{h\to\infty} I_h^* = 1 - \frac{x_m}{\mu}$.

Por su parte, los elementos de las familias de índices absolutos $\Im_A = \{\mu I_h\}_{h\in N}$ y $\Im_A^* = \{\mu I_h^*\}_{h\in N}$ representan el coste de la desigualdad en términos de bienestar social. En efecto, a partir de la expresión [14], se tiene:

$$\begin{aligned} \mu I_h &= \mu - W_h \\ \mu I_h^* &= \mu - W_h^*, h \in N. \end{aligned}$$

En los casos extremos resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to\infty} \mu I_h &= 0 \\ \lim_{h\to\infty} \mu I_h^* &= \mu - x_m. \end{aligned}$$

El coste de la desigualdad es nulo en el caso de indiferencia, y es máximo, siendo la diferencia entre las rentas media y mínima de la distribución, cuando la aversión a la desigualdad es máxima. En definitiva, la discrepancia entre los elementos de $\Im$ y de $\Im^*$ respecto a su aversión a la desigualdad, se traslada a los de $\Im_A$ y $\Im_A^*$ cuando estos se interpretan como el coste de dicha desigualdad en términos de bienestar.

[14] Centra su interés en la situación de los individuos con menor nivel de renta. Considera que la distribución F es preferible a G si la renta mínima de F es mayor que la correspondiente a G, o si, en caso de igualdad entre ellas, su frecuencia en F es menor. Este enfoque deriva de la teoría sobre la justicia social defendida por Rawls (1971).

## 4. Principios de transferencias

Aunque el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton (PT) incorpora un elemento esencial del concepto de desigualdad, se pueden contemplar criterios redistributivos más exigentes. Si se considera que el efecto de una transferencia debería ser mayor si ésta tiene lugar en la parte inferior de la distribución estaríamos ante el denominado Principio de Transferencias Decrecientes (PTD) (Kolm, 1976). Según el PTD, una transferencia progresiva entre dos individuos, con una diferencia de renta dada, ha de implicar una mayor reducción del índice, y con ello mayor incremento del bienestar, cuanto menores sean los niveles de renta de esos individuos. Mehran (1976) y Kakwani (1980) introducen una versión posicional del PTD en la que, para una diferencia de rangos dada entre quienes tiene lugar la transferencia, el impacto es mayor en la medida en que ocurra entre individuos situados en la parte inferior de la distribución. Enunciado de este modo lo denominaremos Principio Posicional de Transferencias (PPT). Ambos principios incorporan una postura semejante frente a las transferencias, pero mientras que para el PTD lo relevante es la diferencia de rentas entre el donante y el receptor, para el PPT lo es la proporción de individuos situados entre ellos.

En la siguiente proposición se caracteriza el PPT para el índice genérico

$$I_\Phi\left(F\right) = 1 - \frac{W_\Phi\left(F\right)}{\mu} = 1 - \frac{1}{\mu}\int\limits_{R^+} x\Phi'\left(F\left(x\right)\right)dF\left(x\right).$$

Proposición 5. (Mehran (1976), Zoli (1999)). La FBS $W_\Phi(F)$ y con ella el índice $I_\Phi\left(F\right)$ satisfacen el PT si y sólo si $\Phi$ es cóncava. Verifican además el PPT si, y sólo si, $\Phi'''(p) > 0$.

Demostración. Sea $\delta$ una pequeña transferencia positiva de renta desde una pequeña fracción, $dp$, de la población en el p-ésimo percentil de la población a los individuos de un percentil inferior $p-s, s>0$. A partir de [19] se obtiene que para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño, la disminución del índice es:

$$\nabla I_\Phi\left(\delta\right) = \frac{1}{\mu}\int\limits_{p-\varepsilon/2}^{p+\varepsilon/2}\delta\Phi'\left(t\right)dt - \frac{1}{\mu}\int\limits_{p-s-\varepsilon/2}^{p-s+\varepsilon/2}\delta\Phi'\left(t\right)dt.$$

Aplicando el Teorema del valor medio y tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$, resulta:

$$dI_\Phi(\delta) = \frac{\delta}{\mu}\left[\Phi'(p) - \Phi'(p-s)\right] dp.$$

Es evidente que $I_\Phi$ satisface el PT, $dI_\Phi(\delta) < 0$, si y sólo si $\Phi'(p)$ es estrictamente decreciente, lo que equivale a la condición $\Phi''(p) < 0$, que caracteriza la concavidad de $\Phi$.

Además, $I_\Phi$ cumplirá el PPT si y sólo si:

$$\frac{\delta}{\mu}\left[\Phi'(q) - \Phi'(q-s)\right] < \frac{\delta}{\mu}\left[\Phi'(p) - \Phi'(p-s)\right],$$

para todo $q < p$, lo que equivale al crecimiento estricto de la función $\Phi''$, es decir $\Phi'''(p) > 0$. $\square$

Conviene observar que las condiciones para que un índice de desigualdad satisfaga el PT y el PPT se expresan únicamente a partir de propiedades de su función de preferencias, $\Phi$. Por lo tanto, no dependen de la forma concreta de la distribución de la renta sobre la que se aplica el índice.

Cuando la Proposición anterior se particulariza a las distribuciones de preferencias que proporcionan un fundamento normativo a las familias de índices $\Im$ y $\Im^*$, es inmediato el resultado siguiente.

Corolario 1. Para $h > 1$, los índices de Gini generalizados, $I_h^*$, satisfacen el PPT, lo que no sucede para los $I_h$.

Demostración. Basta tener en cuenta que a partir de [18] se verifica:

$$\begin{aligned}
\Phi_h'''(p) &= -(h+1)(h-1)p^{h-2} < 0, h > 1, \Phi_1'''(p) = 0,\\
\Phi_h^{*'''}(p) &= h(h+1)(h-1)(1-p)^{h-2} > 0, h > 1, \Phi_1^{*'''}(p) = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

En el PPT la respuesta del índice ante una transferencia depende de las posiciones en la distribución de los individuos entre quienes tiene lugar, pero no de sus respectivos niveles de renta en términos absolutos. Aunque no exista una relación de implicación entre el PTD y el PPT, son principios independientes, el primero de ellos puede parecer más exigente, en el sentido siguiente: si $p$ es un percentil de la distribución, el PTD implica que el efecto de una transferencia sobre $p$ es decreciente con $p$ y tanto mayor cuanto menor sea la renta correspondiente, mientras que para el PPT también decrece con $p$ pero no depende del nivel de renta asociado[15]. En la siguiente proposición se caracteriza el PTD para el caso genérico del índice $I_\Phi(F)$ dado por la expresión [15].

PROPOSICIÓN 6. (Aaberge, 2000). Si $F$ es una distribución de renta con media $\mu$, el índice $I_\Phi$ satisface el PTD si y sólo si $\Phi$ es cóncava y $\Phi''(F(x))\,F'(x)$ es una función estrictamente creciente para $x > 0$. Ello equivale a la condición:

$$-\frac{\Phi'''(F(x))}{\Phi''(F(x))} > \frac{F''(x)}{(F'(x))^2}, x > 0,$$

que también puede expresarse como:

$$-\frac{\Phi'''(p)}{\Phi''(p)} > \varsigma(p), \varsigma(p) = \frac{F''\left(F^{-1}(p)\right)}{F'\left(F^{-1}(p)\right)^2}, 0 < p < 1. \qquad [19]$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\delta$ una transferencia positiva de renta desde una pequeña fracción, $dF(x)$, de los individuos con nivel de renta x a individuos con renta $x-d, 0 < d < x$. Entonces, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, de [15] se sigue que la disminución del índice es:

$$\nabla I_\Phi(\delta) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left[\int_{x-d-\varepsilon/2}^{x\underline{+}d+\varepsilon/2} \delta\Phi'(F(x))\,dF(x) - \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2}(-\delta)\,\Phi'(F(x))\,dF(x)\right].$$

Aplicando el Teorema del valor medio y haciendo $\varepsilon \to 0$, resulta que el cambio relativo en el índice es:

$$dI_\Phi(\delta) = \frac{\delta}{\mu}\left[\Phi'(F(x)) - \Phi'(F(x-d))\right]dF(x).$$

Por lo tanto $dI_\Phi < 0$ si y sólo si $\Phi'(F(x))$ es una función estrictamente decreciente, lo que equivale a la concavidad de $\Phi$. Si se quiere, además, que la disminución del índice sea mayor cuanto menor sea el nivel de renta $x$, para todo $y < x$ se ha de cumplir:

$$\frac{\delta}{\mu}\left[\Phi'(F(y)) - \Phi'(F(y-d))\right] < \frac{\delta}{\mu}\left[\Phi'(F(x)) - \Phi'(F(x-d))\right],$$

[15] Ambos principios pueden ser equivalentes en casos específicos. Así ocurre para la distribución uniforme en el intervalo $[0, x_M], x_M > 0$. En ese caso $F^{-1}(p+s) - -F^{-1}(p) = sx_M$, por lo que entre la diferencia de posiciones y la diferencia de rentas existe una relación unívoca.

para todo $d > 0$. Haciendo $d \to 0$, y bajo el supuesto de concavidad de $\Phi$, lo anterior equivale a que $\Phi^{''}(F(y))\,F^{'}(y) < \Phi^{''}(F(x))\,F^{'}(x)$, para $y < x$. Esto es, $\Phi^{''}(F(x))\,F^{'}(x)$ ha de ser una función estrictamente creciente de $x$; es decir, $\frac{d\left(\Phi^{''}(F(x))F^{'}(x)\right)}{dx} > 0, x > 0$, de donde resulta [19], teniendo en cuenta la concavidad de $\Phi$. $\square$

Según el resultado anterior el que $I_\Phi(F)$ satisfaga el PTD no sólo depende de las propiedades de la distribución de preferencias, sino también de la forma de la distribución de la renta. Dada $\Phi$, el índice $I_\Phi(F)$ satisface el PTD únicamente para una determinada clase de distribuciones de renta. El tamaño de esa clase depende del grado de aversión a la desigualdad que presente $\Phi$. De hecho, el valor del primer miembro de la desigualdad [19] está relacionado con la curvatura de la distribución de preferencias.

También como consecuencia de la Proposición 6 resulta que si el índice $I_\Phi(F)$, o su FBS asociada $W_\Phi(F)$, presenta aversión a la desigualdad ($\Phi^{''}(p) < 0$) y su función de preferencia tiene derivada tercera positiva, satisfará el PTD para todas aquellas distribuciones de renta que sean cóncavas ($F^{''}(x) < 0$). Este es el caso de los índices de Gini generalizados, $I_h^*$, para $h > 1$.

Para analizar con detalle las implicaciones de la Proposición anterior sobre los índices de las familias $\Im$ y $\Im^*$, se ha de tener en cuenta que a partir de [18], para $0 < p < 1$, se cumple:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\Phi_h^{'''}(p)}{\Phi_h^{''}(p)} &= \frac{1-h}{p}, h > 1, \qquad -\frac{\Phi_1^{'''}(p)}{\Phi_1^{''}(p)} = 0,\\
-\frac{\Phi_h^{*'''}(p)}{\Phi_h^{*''}(p)} &= \frac{h-1}{1-p}, h > 1, \qquad -\frac{\Phi_1^{*'''}(p)}{\Phi_1^{*''}(p)} = 0,
\end{aligned}
$$

de manera que la condición [19] de la Proposición 6 se expresaría para el índice $I_h$ mediante:

$$\frac{1-h}{F(x)} > \frac{F^{''}(x)}{\left(F^{'}(x)\right)^2}, h > 0 \qquad [20]$$

mientras que para $I_h^*$ vendría dada por:

$$\frac{h-1}{1-F(x)} > \frac{F^{''}(x)}{\left(F^{'}(x)\right)^2}, h > 0. \qquad [21]$$

Un cálculo sencillo permite comprobar que [20] equivale a la concavidad estricta de la función $(F(x))^h$, mientras que [21] es equivalente a la convexidad estricta de $(1-F(x))^h$. Se puede enunciar, por lo tanto, el siguiente resultado.

COROLARIO 2. Sea $F$ la función de distribución de la renta. Se verifica:

1) El índice de desigualdad $I_h, h \geq 1$, satisface el PTD si, y sólo si, $(F(x))^h$ es estrictamente cóncava.

2) El índice , $I_h^*, h \geq 1$, satisface el PTD si, y sólo si, $(1-F(x))^h$ es estrictamente convexa. Para ello es suficiente la concavidad estricta de $F$.

Como consecuencia del resultado anterior, para los índices de la familia $\Im = \{I_h\}_{h \in N}$ al disminuir $h$, el conjunto de las funciones de distribución para las que $I_h$ satisface el PTD se amplía. Basta tener en cuenta que si $(F(x))^h, h > 1$, es cóncava y $k \in N$ es tal que $1 \leq k < h$, entonces $(F(x))^k$ es también una función cóncava. Los índices de $\Im^* = \{I_h^*\}_{h \in N}$ presentan, también en este aspecto, un comportamiento contrario a los de $\Im$. Al aumentar h, la clase de las distribuciones para las que los índices correspondientes cumplen el PTD es cada vez más amplia. A partir de estas consideraciones es inmediato que si, para una distribución dada, $I_h$, $h \geq 1$, satisface el PTD, también lo satisfará $I_k^*$, $k \geq 1$. El siguiente corolario recoge estas cuestiones.

COROLARIO 3. Si $\Omega_h$ y $\Omega_h^*$ son los conjuntos de distribuciones de renta para las que $I_h$ e $I_h^*$, respectivamente, satisfacen el PTD, se verifica: $\Omega_{h+1} \subseteq \Omega_h$ y $\Omega_h^* \subseteq \Omega_{h+1}^*$, $h \geq 1$. Si $h$, $k \geq 1$, $\Omega_h \subseteq \Omega_k^*$.

Por lo tanto, al aumentar la aversión a la desigualdad de los índices de $\Im$ y $\Im^*$, es más extensa la clase de las distribuciones para las que satisfacen el PTD.

Para probar que los conjuntos $\Omega_h$ y $\Omega_h^*$ son no vacíos vamos a considerar algunas distribuciones teóricas específicas[16]. En el caso de la distribución potencial:

$$F_h(x) = \begin{cases} \dfrac{0, x < 0,}{\left(\frac{x}{x_M}\right)^{\frac{1}{h}}}, 0 \leq x \leq x_M, \end{cases}$$

[16] Las demostraciones de las afirmaciones que se hacen en esta sección, así como el cálculo explícito de los índices para estas distribuciones, están a disposición de cualquier interesado, dirigiéndose a los autores.

siendo $h \geq 1$, la expresión [20] es una igualdad. Ello implica que el índice $I_h$ asigna idéntico peso a una transferencia entre individuos con una diferencia de renta dada con independencia de que tenga lugar en la parte superior, intermedia o baja de la distribución. El índice $I_k$, para $k < h$ y todos los de la familia $\Im^*$ satisfacen el PTD, como consecuencia del Corolario 2, al ser $(F_h(x))^k$ estrictamente cóncava.

Para la distribución

$$\tilde{F}_h(x) = \begin{cases} 1 - 0, x < 0, \left(1 - \dfrac{x}{x_M}\right)^{\frac{1}{h}}, 0 \leq x \leq x_M, \end{cases}$$

se verifica la igualdad en la expresión [21]. Por lo tanto, $I_h^*$ asigna el mismo peso a toda transferencia entre individuos con una diferencia de renta dada sin importar en qué parte de la distribución estén situados. Por otra parte, si $k > h$ dado que $\left(1 - \tilde{F}_h(x)\right)^k$ es estrictamente convexa, aplicando de nuevo el Corolario 2, resulta que $I_k^*$ cumple el PTD.

Para el modelo biparamétrico de Pareto, cuya función de distribución es:

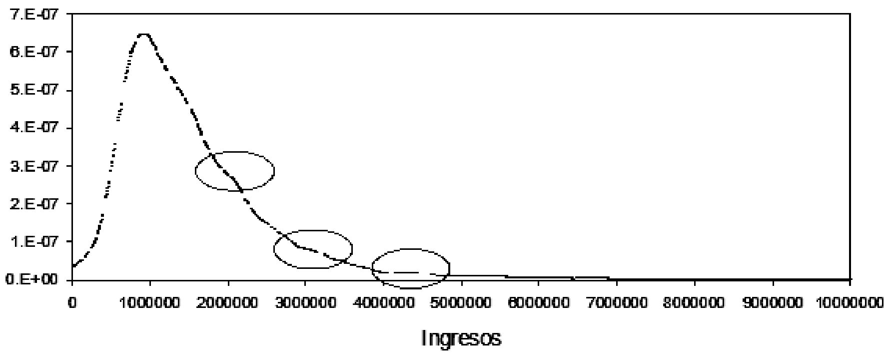
$$F_P(x) = \begin{cases} 0, x < x_m \\ 1 - (x_m/x)^{\alpha}, x \geq x_m, \end{cases}$$

siendo $\alpha > 1$ un parámetro de desigualdad y $x_m > 0$ la renta mínima, el índice de Gini y todos los índices de $\Im^*$ satisfacen el PTD, dado que $F_P(x)$ es estrictamente cóncava. Esta distribución se utiliza para ajustar la cola superior de las distribuciones de renta unimodales. De hecho, una propiedad que se considera deseable para las distribuciones mediante las que se modelizan las observadas es que sean asintóticamente convergentes al modelo de Pareto.

En los casos anteriores la forma de la función de distribución en relación a su concavidad/convexidad es uniforme a lo largo de la escala de rentas. Las distribuciones de renta observadas no presentan, en general, ese comportamiento. Suelen ser distribuciones unimodales con asimetría hacia la derecha. Si para una distribución de este tipo se dispone de datos agrupados y se le ajusta uno de los modelos habituales, tales como el Lognormal, el modelo Gamma o el propuesto por Dagum (1980), resulta una distribución que es estrictamente convexa para las rentas menores que la moda, $M_0$, y estrictamente cóncava para las rentas superiores a ella. En tal caso, el índice de Gini y los Gini generalizados cumplirán el PTD para la distribución truncada a partir de $M_0$.

Cuando se dispone de microdatos y se realiza un ajuste no paramétrico en el que no se impone, por lo tanto, un modelo específico, se detecta la existencia de niveles de renta en un entorno de los cuales la pendiente de la función de densidad no tiene signo constante. Para poner de manifiesto esta situación, en el Gráfico 2 se representa la función de densidad de la distribución individual de los ingresos equivalentes[17] en España para el año 2000[18], estimada de forma no paramétrica mediante el método Kernel[19].

GRÁFICO 2
Función de densidad de los ingresos individuales para España, 2000

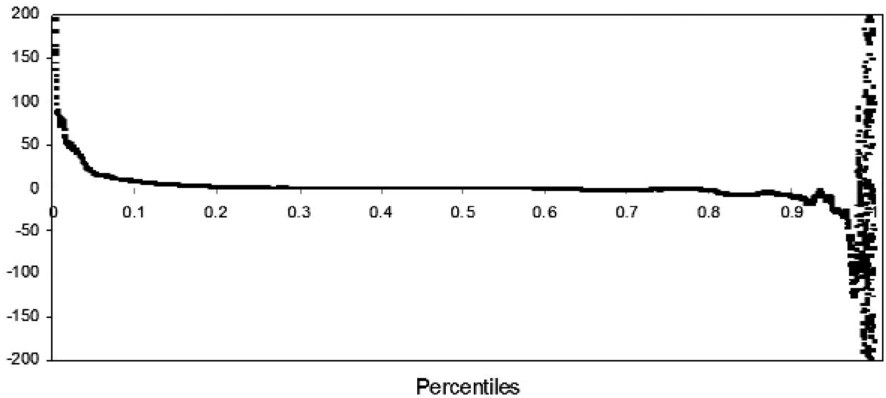



En los puntos (indicados mediante un círculo) en los que la función de densidad presenta cambios bruscos en el valor y signo de su pendiente, la función $\varsigma(p)$, que aparece en la expresión [19] de la Proposición 6, presenta grandes oscilaciones. Su representación figura en el Gráfico 3.

[17]Se ha empleado la escala de equivalencia de la OCDE modificada.
[18]Los datos utilizados son los de la octava ola del Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE), fuente de datos armonizada a nivel comunitario y coordinada por la Oficina de Estadística de la Unión Europea (EUROSTAT). Dado que los montantes relativos a ingresos, expresados en pesetas de 1996, son anuales y pertenecen al año anterior de la entrevista, a pesar de que la octava ola corresponde al año 2001, los ingresos son los correspondientes al año 2000.
[19]Para ello, se ha utilizado el comando *kdensity* de STATA 8 con el Kernel de Epanechnikov. Hemos optado por la ventana óptima después de intentar distintos tipos de ventana. El número de puntos de evaluación ha sido 4948.

La gráfica de $\varsigma(p)$ prueba que si el índice genérico $I_\Phi$ satisface el PTD, su función de preferencias, $\Phi$, ha de presentar una pronunciada curvatura para valores pequeños de $p$, $p \leq 0,03$, lo que implica que $\Phi$ ha de incorporar una fuerte aversión a la desigualdad y, por lo tanto, asignará una ponderación muy alta a las rentas situadas por debajo del tercer percentil. Por otra parte, a partir del percentil noventa[20], el comportamiento de la función $\varsigma(p)$, inducido por el ya señalado de la función de densidad, no es sistemático, por lo que no se puede asegurar, en general, cuál será la respuesta de $I_\Phi$ frente al PTD para las rentas más altas.

GRÁFICO 3
Función (p)




Este análisis gráfico muestra que los índices de $\Im$ y $\Im^*$, aplicados a la distribución del ingreso individual en España para el año 2000, difícilmente cumplirán el PTD en toda la distribución, pero sí lo pueden verificar en intervalos de rentas intermedias, en los que se ubica una proporción elevada de la población. Si un índice concreto de $\Im$ o de $\Im^*$ satisface el PTD en un determinado intervalo, cualquier otro índice de esas familias que presente mayor aversión a la desigualdad, verifica dicho principio sobre ese intervalo y, posiblemente, sobre otros de mayor amplitud.

## 5. Conclusiones

Dada una distribución de rentas, cada una de las familias numerables de medidas de desigualdad $\Im$ (índices de Aaberge) y $\Im^*$ (índices de Gini generalizados) caracterizan a la curva de Lorenz asociada y,

[20] Corresponde aproximadamente a una renta de 4 millones de pesetas de 1996.

en consecuencia, junto a la renta media determinan unívocamente la distribución.

Se trata de índices que, al ser casos particulares de las medidas lineales, tienen una interpretación sencilla a partir de las diferencias entre la línea de equidistribución y la curva de Lorenz. Esto no sucede con otros índices de uso habitual tales como los de la familia de Atkinson o los de Entropía.

Ambas familias incluyen entre sus elementos el índice de Gini pero, excepto para esta medida, los índices pertenecientes a cada una de las familias difieren en el modo en que ponderan las diferencias de Lorenz a lo largo de la escala de rentas. Unos asignan a esas diferencias un peso creciente con el nivel de renta, mientras que los de la otra familia siguen el criterio contrario en la asignación de ponderaciones.

Consideradas ambas familias conjuntamente, están ordenadas según el grado de aversión a la desigualdad que presentan sus elementos, cubriendo todo el espectro desde la indiferencia a la aversión máxima o leximin rawlsiano. Esta propiedad equivale a la jerarquización existente entre sus respectivas distribuciones de preferencias sociales según su grado de concavidad, el cual varía desde el correspondiente a la función lineal (concavidad nula) hasta el asociado a una función que, salvo en un punto inicial, presenta una gráfica horizontal (concavidad máxima).

Los índices de estas familias son consistentes con el criterio de ordenación parcial inducido por la curva de Lorenz en el conjunto de las distribuciones de renta y satisfacen, por lo tanto, el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton. Sin embargo, su comportamiento difiere frente a principios de transferencias más exigentes. Los elementos de $\Im^*$, excluido el índice de Gini, cumplen el Principio Posicional de Transferencias, propiedad que no verifican los elementos de $\Im$. El cumplimiento o no de dicho principio es consecuencia exclusivamente de las características de sus distribuciones de preferencias.

Respecto al Principio de Transferencias Decrecientes, en cuya verificación también interviene la forma de la distribución sobre la que se aplica la medida de desigualdad, la clase de distribuciones para las que se satisface este principio se amplía sucesivamente al aumentar la aversión a la desigualdad que incorpora el índice. En definitiva, al considerar conjuntamente las familias numerables de medidas de desigualdad $\Im$ y $\Im^*$ se presenta una ordenación en varios aspectos, todos ellos relacionados: en el grado de aversión de sus elementos a la desigualdad, en el grado de concavidad de sus respectivas distribuciones de preferencias sociales y en la relación de inclusión que presentan los conjuntos de distribuciones respecto de las cuales satisfacen el PTD.

Para algunos modelos teóricos de probabilidad, los índices objeto de estudio, o al menos algunos de ellos, cumplen el Principio de Transferencias Decrecientes. En las distribuciones de renta observadas estimadas de forma no paramétrica, libres de la rigidez que conlleva su ajuste a un modelo concreto, es difícil que se verifique la condición que caracteriza el cumplimiento de este principio, en toda la escala de rentas, debido a que la pendiente de la función de densidad puede presentar localmente una acusada variabilidad en valor y signo. Sin embargo, los índices de ambas familias, sobre todo los de $\Im^*$, pueden satisfacer dicho principio en intervalos de rentas intermedias y la amplitud de los mismos aumenta al hacerlo el valor del parámetro asociado al índice.

En la práctica, la utilización de un conjunto de medidas de desigualdad pertenecientes a las familias $\Im$ o $\Im^*$ es adecuada para obtener información, a través de sus momentos, sobre la curva de Lorenz de una distribución y realizar valoraciones sobre la desigualdad relativa de acuerdo a distintos juicios distributivos. La selección depende de la postura del evaluador social y de la naturaleza de cada caso empírico. Por ejemplo, los índices $I_1^* = I_1 = G$, $I_2$ e $I_3$, resumen la curva de Lorenz en sus aspectos descriptivos. Si a ellos se añade un elemento de $\Im$ y otro de $\Im^*$, ambos con un valor suficientemente alto de su parámetro, se combina la información anterior con la que proporcionan dos medidas muy diferentes en el ámbito normativo. Una presenta escasa aversión a la desigualdad y pondera más la desigualdad existente en la parte alta de la distribución, mientras que la otra incorpora la actitud contraria, satisface el PPT y, posiblemente, el PTD. Cuando se aplica un conjunto de índices a un caso concreto, la posible obtención de resultados contradictorios según el índice considerado permite extraer conclusiones tan interesantes, teniendo en cuenta las propiedades de las diferentes medidas, como las que proporcionan los casos robustos.

## Referencias

Aaberge, R. (2000): "Characterizations of Lorenz curves and income distributions", *Social Choice and Welfare* 17, pp. 639-653.

Atkinson, A. B. (1970): "On the measurement of inequality", *Journal of Economic Theory* 2, pp. 244-263.

Ben Porath, E. e I. Gilboa (1994): "Linear measures, the Gini index, and the income equality trade-off", *Journal of Economic Theory* 64, pp. 443-467.

Blackorby, C. y D. Donaldson (1978): "Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare", *Journal of Economic Theory* 18, pp. 59-80.

Dagum, C. (1980): "The generation and distribution of income, the Lorenz curve and the Gini ratio", *Economie Appliquée* XXXIII 2, pp. 327-367.

Dalton, H. (1920): "The measurement of inequality of incomes", *Economic Journal* 30, pp. 348-361.

Dardanoni, V. y P. J. Lambert (1988): "Welfare rankings of income distributions: a role for the variance and some insights for tax reforms", *Social Choice and Welfare* 5, pp. 1-17.

Donaldson, D. y Weymark, J. A. (1980): "A single parameter generalization of the Gini indices of inequality", *Journal of Economic Theory* 22, pp. 67-86.

Duclos, J. Y. (2000): "Gini indices and redistribution of income", *International Tax and Public Finance* 7, pp. 141-162.

Eurostat, Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE), Octava ola (2001).

Foster, J. E. (1985): "Inequality measurement", en *Fair Allocation* (ed. H. P. Young), *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics,* vol. 33, pp. 31-68.

Gini, C. (1912): "Variabilità e mutabilità", *Studi Economico-giuridici* Università di Cagliari, vol 3-2, pp. 1-158.

Kakwani, N. C. (1980): "On a class of poverty measures", *Econometrica* 48, pp. 437-446.

Kendall, M., A. Stuart y K. Ord (1994), *Advanced theory of Statistics,* Vol. 1, Edward Arnold, London.

Kolm, S. C. (1976): "Unequal inequalities, I, II", *Journal of Economic Theory* 12, pp. 416-442; 13, pp. 82-111.

Lambert, P. J. (2001), *The distribution and redistribution of income* Manchester University Press.

Mehran, F. (1976): "Linear measures of inequality", *Econometrica* 44, pp. 805-809.

Muliere, P. y M. Scarsini (1989): "A note on stochastic dominance and inequality measures", *Journal of Economic Theory* 49, pp. 314-323.

Newbery, D. M. (1970): "A theorem of the measurement of inequality", *Journal of Economic Theory* 2, pp. 264-266.

Rawls, J. (1971), *A theory of justice* Harvard University Press, Cambridge.

Sen, A. K. (1973), *On economic inequality* Clarendon Press, Oxford.

Shorrocks, A. F. (1980): “The class of additively decomposable inequality measures”, *Econometrica* 48, pp. 613-625.

Shorrocks, A. F. y J. E. Foster (1987): “Transfer sensitive inequality measures”, *Review of Economic Studies* 54(3), pp. 485-497.

Yaari, M. E. (1987): “The dual theory of choice under risk”, *Econometrica* 55, pp. 99-115.

Yaari, M. E. (1988): “A controversial proposal concerning inequality measurement”, *Journal of Economic Theory* 44, pp. 381-397.

Yitzhaky, S. (1983): “On an extension of the Gini index”, *International Economic Review* 24, pp. 617-628.

Zoli, C. (1999): “Intersecting generalized Lorenz curves and the Gini index”, *Social Choice and Welfare* 16, pp. 183-196.

## Abstract

*The aim of this paper is studying two countable families of inequality measures obtained as linear transformations of potential moments, measured respect to the origin, of the Lorenz curve and its dual curve, considering both as distribution functions. Both families are jointly presented, clarifying their similarities and divergences. In the normative aspects, social preference functions are obtained that relate welfare and inequality. This allows us to analyse the level of inequality aversion and, on the other hand, to determine the conditions under which the Principle of Diminishing Transfers, or its positional version, are fulfilled.*

*Keywords: Characterization of Lorenz curve, aversion to inequality, principles of transfers.*

*Recepción del original, marzo de 2006*
*Versión final, octubre de 2006*