Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XIV, n.º 2 (1990), págs. 191-211

LOS MODELOS ARIMA, EL ESTADO DE EQUILIBRIO EN VARIABLES ECONOMICAS Y SU ESTIMACION*

Antoni ESPASA

Banco de España

Daniel PEÑA

Universidad Politécnica de Madrid

En este trabajo se expone que, bajo condiciones bastante generales, los modelos ARIMA contienen una caracterización adecuada de la senda de evolución a largo plazo de una variable económica. Se describen dichas sendas para los tipos de modelos ARIMA más usuales en economía y se proponen estimadores para los parámetros que las definen, así como para sus varianzas. Finalmente los procedimientos anteriores se aplican a distintas series de la economía española como: actividad industrial y efectivo en manos del público. En tales aplicaciones se comentan las conclusiones que los resultados obtenidos sugieren sobre las variables analizadas.

1. Introducción

El objetivo de este artículo es clarificar el papel de los modelos ARIMA univariantes como instrumento válido para realizar análisis económico. Aunque el tipo de análisis que con ellos se puede realizar es muy limitado, —estos modelos ignoran las relaciones entre variables de interés y otras variables, por lo que no es factible realizar ejercicios de simulación, control, ni análisis estructural—, frecuentemente se olvida que sí se pueden utilizar para configurar de forma consistente la naturaleza del largo plazo de una variable económica, así como la estructura temporal con que esa variable, tiende, en cada momento, a una senda de crecimiento equilibrado. En este artículo se propone un procedimiento de cálculo para obtener esta senda de evolución a largo plazo, y se obtiene, por diferencia con la función de predicción, la desviación temporal que seguiría la variable hasta alcanzar dicha senda si en el futuro no sufriese más perturbaciones estocásticas.

El artículo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 se señala la relación del Análisis de Series Temporales con los modelos econométricos para justificar, a partir de los resultados aparecidos en la literatura, la validez de los modelos ARIMA para los fines que se pretenden en el artículo. Esta sección acaba exponiendo que la utilización que se realiza en secciones posteriores de los modelos ARIMA parte de la correspondiente función de predicción. El

* Estamos agradecidos a Agustín Maravall, Juan José Dolado y a un evaluador anónimo por sus comentarios a una primera versión de este trabajo.

estudio de dicha función y su descomposición en un componente permanente y otro transitorio se realiza en la sección 3. La sección 4 se dedica a discutir la interpretación económica de los componentes de la función de predicción. En la 5 se presenta el procedimiento de cálculo de dichos componentes. En la sección 6 se aplican las propuestas anteriores a ciertas series de la economía española.

2. Modelos ARIMA y análisis económico

Los modelos ARIMA con ANALISIS DE INTERVENCION constituyen una clase general para explicar series económicas en función exclusivamente de su propio pasado, así pues, conviene saber cuál es su relación con un modelo global que contemple la determinación multivariante de la serie en cuestión junto con todas aquéllas con las que esté relacionada.

A nivel econométrico, el modelo global por excelencia es el modelo econométrico estructural (SEM, structural econometric model) desarrollado a principios de los años cincuenta en el seno de la Cowles Foundation (véase Koopmans y Hood, 1953). La relación de los modelos ARIMA univariantes con el modelo SEM fue inicialmente tratada por Zellner y Palm (1974) y ha sido posteriormente desarrollada por Prothero y Wallis (1976), Wallis (1977), Zellner (1979) y Wallis (1980). El resultado que se desprende de esos trabajos es que si las variables exógenas del modelo vienen determinadas por un modelo ARIMA multivariante[1] cada una de las variables endógenas del modelo SEM viene determinada individualmente por un modelo ARIMA.

Este resultado es de gran relevancia práctica. En efecto, dado que al modelo ARIMA univariante de una serie concreta se llega a partir del modelo global SEM, tenemos que en la medida que el modelo SEM refleja las características del mundo real, el modelo ARIMA de una serie individual debe incorporar también dichas características. En consecuencia, un modelo ARIMA no es una caja negra, de mayor o menor utilidad en la predicción, sino que es un modelo operativo para describir a nivel univariante el comportamiento y características fundamentales de un fenómeno económico. Por tanto, un modelo ARIMA es una herramienta útil para hacer análisis económico, pues, si el modelo es correcto, sus resultados no pueden estar en contradicción con los que se derivan del modelo SEM.

El tipo de análisis económico que se puede realizar con un modelo ARIMA se puede resumir como sigue. El modelo ARIMA contiene una descripción adecuada del comportamiento a largo plazo del fenómeno en cuestión y, a su vez, incorpora la estructura temporal con la que dicho fenómeno tiende a volver en cada momento a su sendero de crecimiento equilibrado («steady state»), que, en general, es estocástico en el sentido de que viene determinado por las condiciones iniciales del sistema.

[1] Los modelos ARIMA multivariantes (véase Tiao y Box, 1981) son una generalización de los modelos multivariantes utilizados por Quenouille (1957).

A nivel univariante, el interés de disponer de un instrumento para interpretar y caracterizar la variable en cuestión ha sido durante mucho tiempo ambiguo, o inexistente, debido fundamentalmente a que tanto los procedimientos de predicción basados en el alisado de series, como los de descomposición en tendencia, componentes cíclicos y elemento residual, no se basaban en una teoría univariante de aceptación general ni estaban vinculados de forma directa con el modelo SEM, que es el esquema reconocido en la profesión como válido para representar el universo económico. Sin embargo, los modelos ARIMA incorporan una teoría univariante bastante general y se derivan de los modelos SEM, por lo que hemos concluido que sirven para caracterizar una serie. Así pues, procede plantearse cómo realizar dicha caracterización.

El concepto teórico de senda de crecimiento equilibrado de una variable económica es algo que ni se observa, ni se alcanza nunca, sino que es simplemente un estado al que se tiende, y que, además, puede cambiar en el tiempo en función de las condiciones iniciales. El estado de crecimiento equilibrado se lograría si a partir de un determinado momento T la variable no sufriera en el futuro más perturbaciones estocásticas. Esto nos apunta que tal estado lo debemos estudiar a partir de la función de predicción del modelo ARIMA, que es el instrumento que nos describe la evolución futura que seguiría la serie si en lo sucesivo no sufriese ninguna perturbación aleatoria. Al estudio de la función de predicción se dedica la sección siguiente.

3. Modelos estacionales, su función de predicción y sus componentes

3.1. Modelos estacionales y su función de predicción

Según el teorema de Wold todo proceso estocástico lineal y estacionario sin componentes deterministas puede representarse por:

$$X_t = \Psi(L)\, a_t \qquad [1]$$

donde $\Psi(L) = 1 + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \ldots$ es un polinomio convergente infinito en el operador de retardo L, y a_t viene generada por un proceso estocástico ruido blanco. Aproximando este polinomio mediante el cociente de dos polinomios de orden finito resulta la representación ARMA.

$$\Phi(L)\, X_t = \theta(L)\, a_t \quad , \qquad [2]$$

donde $\Psi(L) = [\Phi(L)]^{-1}\theta(L)$, y el operador $\Phi(L)$ tiene todas las raíces fuera del círculo unidad para que el proceso sea estacionario. La formulación anterior se extiende para procesos no estacionarios (Box y Jenkins, 1970) permitiendo que una o más raíces del operador $\Phi(L)$ se encuentren en el círculo unidad. Para procesos estacionales de período s, el modelo [2] se simplifica realizando una factorización de los polinomios en los operadores L y L^s. Estas dos modificaciones se apoyan en las propiedades de factorización de operadores polinómicos que, como veremos, son cruciales para determinar la estructura del modelo.

En general, un modelo ARIMA estacional multiplicativo se representa por:

$$\phi_p(L)\,\Phi_P(L^s)\,(\Delta^d\,\Delta_s^D\,y_t^\lambda - u) = \theta_q(L)\,\Theta_Q(L^s)\,a_t \quad , \qquad [3]$$

donde $\Delta = 1 - L$ es el operador de diferencia regular, $\Delta_s = 1 - L^s$ es el operador de diferencia estacional, d es el número de diferencias regulares, D el número de diferenciales estacionales, λ es el parámetro de la transformación Box-Cox, μ es la media de la serie estacionaria, $\phi_p(L)$ y $\theta_q(L)$ son operadores finitos estables (con raíces fuera del círculo unidad) en el operador de retardo L y $\Phi_P(L^s)$, $\Theta_Q(L^s)$ son los operadores estables estacionales sobre L^s. Supondremos que D es uno y llamaremos X_t a la serie transformada y_t^λ (normalmente λ tomará los valores uno, que indica no transformación, o cero que supone la transformación logarítmica). Llamando:

$$\tilde{\phi}_r^*(L) = \phi_p(L)\,\Phi_P(L^s)\,\Delta^d\,\Delta_s \quad ; \qquad r = p + d + s\,(1 + P)$$

$$\theta_m^*(L) = \theta_q(L)\,\Theta_Q(L^s) \quad ; \qquad m = q + sQ$$

$$c = \phi_p(L)\,\Phi_P(L^s)\,\mu = \phi^*(L)\,\mu\,.$$

y $\hat{X}_t(\ell)$ a la predicción de $X_{t+\ell}$ desde el origen t, tenemos que tal predicción viene dada por:

$$\hat{X}_t(\ell) = \sum_{i=1}^{r} \tilde{\phi}_i^*\,\hat{X}_t(\ell - i) + \sum_{j=1}^{m} \theta_j^* a_{t+\ell-j} + c \quad , \qquad [4]$$

donde las predicciones $\hat{X}_t(\ell - i)$ coinciden con los valores observados cuando el horizonte es negativo y las perturbaciones $a_{t+\ell-j}$ son cero si $\ell > j$ y coinciden con los valores estimados si $j > \ell$.

Para $\ell > m$ la parte MA del modelo no tendrá efecto en la predicción, ya que todas las innovaciones $a_{t+\ell}$, $a_{t+\ell-1}$, ... $a_{t+\ell-m}$ serán desconocidas en t y, por tanto, se sustituirán por su esperanza matemática que es cero. En consecuencia, para un horizonte temporal relativamente lejano se obtiene la llamada ecuación de predicción final en la que:

$$\hat{X}_t(\ell) = \tilde{\phi}_1^*\,\hat{X}_{t(\ell-1)} + \ldots + \tilde{\phi}_r\,\hat{X}_{t(\ell-r)} + c \qquad [5]$$

La solución de esta ecuación en diferencias proporciona la estructura de la ecuación de predicción. Para obtener su solución vamos a utilizar el teorema siguiente, cuya demostración puede verse en Peña (1989).

TEOREMA

Sea la ecuación en diferencias homogéneas

$$A(L)\,X_t = 0 \quad , \qquad [6]$$

donde $A(L) = 1 + a_1 L + \ldots + a_k L^k$ es un polinomio finito en el operador de retardo que puede factorizarse como:

$$A(L) = P(L)\, Q(L) \quad , \qquad [7]$$

donde los polinomios $P(L)$ y $Q(L)$ son primos (no tienen raíces en común). Entonces, la solución general de la ecuación puede siempre escribirse como:

$$Z_t = p_t + q_t \quad , \qquad [8]$$

donde las secuencias p_t y q_t son las soluciones de cada polinomio primo, es decir:

$$P(L)\, p_t = Q(L)\, q_t = 0 \quad , \qquad [9]$$

Para aplicar este teorema, observemos que la ecuación de predicción final puede escribirse, para $\ell \quad m$:

$$\phi^{*}(L)\,(\Delta^d \Delta_s \hat{X}_t(\ell) - \mu) = 0 \quad , \qquad [10]$$

donde el operador L actúa sobre el índice ℓ y t, origen de la predicción, es fijo.

El operador estable $\phi^{*}(L)$ tiene todas las raíces fuera del círculo unidad, el operador $(1 - L)^d$ tiene una raíz unitaria repetida d veces, mientras que el operador $(1 - L^s)$ puede escribirse:

$$(1 - L^s) = (1 - L)\; S(L) \qquad [11]$$

donde:

$$S(L) = (1 + L + \ldots + L^{s-1})$$

Este operador tiene $s - 1$ raíces, todas ellas en el círculo unidad. Si s es par, estas $s - 1$ raíces incluyen $L = -1$ y otras $s - 2$ raíces complejas conjugadas con módulo unitario y distribuidas simétricamente en el círculo unidad. En consecuencia, los operadores estacionarios $\phi^{*}(L)$ y no estacionarios $\Delta^d \Delta_s$ no tienen ninguna raíz en común y la ecuación de predicción final puede siempre descomponerse en dos componentes:

$$\hat{X}_t(\ell) = P_t(\ell) + t_t(\ell),$$

donde:

(1) $P_t(\ell)$ es el componente permanente de la predicción a largo plazo, que viene determinado únicamente por la parte no estacionaria del modelo y es la solución de:

$$\Delta^d \Delta_s P_t(\ell) = \mu \qquad [12]$$

(2) $t_t(\ell)$ es el componente transitorio, que viene determinado por el operador autorregresivo estacionario. Este componente define como tiende a producirse

la aproximación hacia el componente permanente. El componente transitorio se define mediante la ecuación:

$$\phi(L)\,\Phi(L^s)\,t_t(\ell) = \phi^*(L)\,t_t(\ell) = 0 \quad . \qquad [13]$$

A continuación estudiamos la forma de estos componentes en función del modelo ARIMA y en la sección 5 analizamos cómo calcularlos.

3.2. El componente transitorio

El componente transitorio de la ecuación de predicción final es la solución de:

$$\phi^*(L)\,t_t(\ell) = 0 \quad . \qquad [14]$$

La solución general de esta ecuación en diferencias homogéneas, suponiendo que las $n = p + P \cdot s$ raíces del polinomio $\phi^*(L)$ son distintas, es (véase Peña, 1987, págs. 581-582):

$$t_t(\ell) = b_1^{(t)}\,G_1^{\ell} + \ldots + b_n^{(t)}\,G_n^{\ell} \quad , \qquad [15]$$

donde $G_1^{-1}, \ldots, G_n^{-1}$ son las raíces del polinomio autorregresivo y $b_j^{(t)}$ son coeficientes que dependen del origen de la predicción. Como, por hipótesis, el operador AR es estacionario, sus raíces estarán fuera del círculo unidad o, lo que es equivalente, los términos G_j son todos en módulo menores que la unidad. En consecuencia:

$$\lim_{\ell \to \infty} t_t(\ell) = \sum_{\ell \to \infty} b_j^{(t)} \lim G_j^{\ell} = 0 \qquad [16]$$

y el componente transitorio será cero a largo plazo. Este mismo razonamiento es válido cuando existen h raíces idénticas, ya que entonces el término asociado a esas h raíces iguales, G_h, será:

$$[b_1^{(t)} + b_2^{(t)}\,\ell + \ldots + b_h^{(t)}\,\ell^{h-1}]\,G_g^{\ell} \quad ,$$

que tenderá de nuevo a cero cuando $\ell \to \infty$ si $|G_h| < 1$.

En consecuencia, el componente transitorio específica cómo se produce la transición hacia el componente permanente y desaparece para horizontes de predicción altos.

3.3. El componente permanente

Utilizando la factorización [11], el componente permanente de la ecuación de predicción a largo plazo puede escribirse [12] como:

$$\Delta^{d+1}\,S(L)\,P_t(\ell) = \mu \quad . \qquad [17]$$

Según el teorema de la sección anterior, la solución de esta ecuación puede a su vez descomponerse en dos términos asociados a los polinomios primos Δ^{d+1} y

$S(L)$, al primero lo denominamos componente de tendencia, T_t, y será la solución de:

$$\Delta^{d+1} T_t(\ell) = c, \qquad [18]$$

donde $c = \mu/s$; y al segundo, lo llamaremos componente estacional, E_t, y es la solución de:

$$S(L)\, E_t(\ell) = 0 \quad . \qquad [19]$$

Es inmediato comprobar que estos componentes satisfacen la ecuación [17]. En la sección siguiente se analizan sus propiedades.

3.4. El componente de tendencia

El componente de tendencia del modelo es la solución de [18] que puede escribirse:

$$T_t(\ell) = c_0^{(t)} + c_1^{(t)}\ell + \ldots + c_d^{(t)}\ell^d + c^*\ell^{d+1} \qquad [20]$$

donde $c^* = \mu/[s\,(d+1)!]$. La solución [20] es un polinomio de grado $d+1$ con coeficientes que van variando con el origen de la predicción, a excepción del último que es constante e igual a c^*. Para obtener [20] se ha supuesto que $D = 1$ en [3]. Si $D = 0$ la ecuación [18] tiene grado d y la solución es:

$$T_t(\ell) = c_0^{(t)} + c_1^{(t)}\ell + \ldots + \frac{\mu}{d\,!}\ell^d \quad .$$

La tendencia, por tanto, de un modelo ARIMA es siempre polinómica: si no hay diferencias estacionales y $\mu = 0$, el grado del polinomio es $d-1$, mientras que en este mismo caso si $\mu \neq 0$ el grado es d. Cuando existe una diferencia estacional el polinomio tendencial es de grado d, si $\mu = 0$, y $d+1$ si $\mu \neq 0$.

3.5. El componente estacional

El componente estacional del modelo es la solución de [19], que es cualquier función de período s con valores que sumen cero cada s retardos. En efecto, según [19].

$$(1 + L + \ldots + L^{s-1})\, E_t(\ell) = \sum_{j=t-s+1}^{t} E_t(j) = 0$$

y llamando $h = \ell - s$

$$\sum_{j=h+1}^{h+s} E_t(j) = 0 \quad , \qquad [21]$$

es decir, la suma de s valores consecutivos cualesquiera debe ser cero. En efecto, de [21]:

$$E_t(h+s) = -\sum_{j=h+1}^{h+s-1} E_t(j)$$

y, por otra parte, particularizando [21] para el límite inferior $j = h$ y separando el primer término:

$$E_t(h) = -\sum_{j=h+1}^{h+s-1} E_t(j),$$

que demuestra que la función es periódica de período s. Llamaremos

$$S_i^{(t)} = E_t(\ell), \qquad \ell = 1, \dots s \ ,$$

a los s coeficientes que satisfacen la ecuación [21], que son los coeficientes estacionales de la función de predicción, y que cumplen la restricción.

$$\sum_{i=1}^{s} S_i = 0 \quad ,$$

El superíndice t en los coeficientes estacionales indica que dichos coeficientes varían con el origen de la predicción y se actualizan cuando recibimos nuevos datos. Los coeficientes estacionales se determinarán a partir de las condiciones iniciales, como veremos en la sección cinco.

3.6. La Ecuación de Predicción a largo plazo

Como hemos visto, a largo plazo el componente transitorio de la ecuación de predicción final se hace cero y únicamente queda el componente permanente, es decir, para k muy grande

$$\hat{X}_t(\ell) = T_t(\ell) + E_t(\ell) \quad ,$$

donde $T_t(\ell)$ es una tendencia polinómica y $E_L(\ell)$ es el componente estacional que se repite cada s períodos.

4. Interpretación económica de los componentes de la función de predicción univariante

En esta sección pretendemos analizar qué tipo de información proporciona la función de predicción de la sección anterior correspondiente a una variable económica. Empecemos señalando que la predicción se puede interpretar como el valor que tomará la variable en el futuro si el sistema no sufre ningún tipo de perturbaciones con posterioridad a t. Así, al calcular predicciones lo único que hacemos es sustituir en el modelo que define los valores (futuros) de la variable, las perturbaciones futuras desconocidas por su media cero.

Con ello la predicción es el valor futuro que tendría la variable X si no ocurriese ningún tipo de innovación a partir del momento en que realizamos la predicción.

En consecuencia, las predicciones descritas en la sección anterior para distintos valores de ℓ no son más que las expectativas que se tienen en el momento t sobre los valores de la variable en $t + 1, t + 2, \ldots$ Nótese que se trata de unas expectativas que no son eficientes, pues no se construyen teniendo en cuenta toda la información existente en el mundo, sino que son unas expectativas que llamaremos univariantes, pues se construyen utilizando exclusivamente la información sobre el fenómeno en cuestión.

La función de predicción se puede interpretar como la función generadora de expectativas, y esa función, y más concretamente sus parámetros, son los que determinan el carácter del mecanismo de generación de expectativas de una variable.

Bajo el supuesto de que los parámetros del modelo ARIMA son conocidos, el valor $X_{t+}\ell$ se puede descomponer de la siguiente forma:

$$X_{t+\ell} = \hat{X}_{t+\ell} + e_{t+\ell} \quad , \qquad [22]$$

donde por $e_{t+}\ell$ denotamos el error de predicción que cometemos en t al predecir $X_{t+}\ell$, y que se puede demostrar que es igual a

$$e_{t+\ell} = a_{t+\ell} + \Psi_1 a_{t+\ell-1} + \ldots + \Psi_{\ell-1} a_{t+1} \qquad [23]$$

Obsérvese que con la descomposición anterior estamos dividiendo el valor observado $X_{t+\ell}$ en dos partes, que son independientes entre sí:

— $\hat{X}_{t+\ell}$: *expectativa* que sobre $X_{t+\ell}$ tenemos en el momento t, o equivalentemente, valor que tomaría $X_{t+\ell}$ suponiendo que entre $t + 1$ y $t + \ell$ el sistema no sufriese ningún tipo de innovación (perturbación).

— $e_{t+\ell}$: *efecto de las sorpresas* ocurridas entre $t + 1$ y $t + \ell$, que se obtiene como una suma ponderada de las correspondientes innovaciones.

Siguiendo el argumento anterior tenemos que si dejamos que ℓ tienda a infinito, la función de predicción indica el valor al que tiende la variable a largo plazo, si en lo sucesivo las innovaciones o perturbaciones estocásticas que afectan al sistema fuesen cero. Por tanto, dando a ℓ valores grandes y cada vez mayores la función de predicción nos describe la *senda de equilibrio a largo plazo* de la variable económica en cuestión. Así, si el límite de la función de predicción es una constante, concluiremos que la variable tiende a un equilibrio estable; por el contrario, si dicha función no tiene límite diremos que la variable tiende a una situación de crecimiento equilibrado («steady state»).

En conclusión, tenemos que la importancia económica de la función de predicción obedece a dos causas fundamentales: por un lado, nos permite cuantificar las expectativas a distintos plazos sobre un determinado fenómeno; por otro, nos describe la senda de equilibrio a largo plazo hacia la que se mueve

dicho fenómeno que, ignorando el componente estacional, viene dada por la tendencia de la función de predicción.

Para llenar de contenido económico la estructura de dicha tendencia referida a una variable económica, definamos el concepto de *variables integradas* que vamos a utilizar a continuación[2]. Diremos que una variable generada por un modelo ARIMA es integrada de orden $(h, 1)$ si necesita ser diferenciada h veces, incluidas tanto las diferenciaciones regulares como las estacionales, para convertirse en estacionaria y la transformación estacionaria tiene una esperanza matemática distinta de cero. Si en el caso anterior la esperanza matemática es cero diremos que la variable es integrada de orden $(h, 0)$. En general el orden de integración lo representamos por (h, m), donde m toma el valor cero o uno según sea nula o no la esperanza matemática de la transformación estacionaria de la variable. Por lo visto en la sección anterior, el orden de integración describe plenamente la estructura polinomial de la tendencia de la función de predicción, que será de orden $\max(0, h+m-1)$. La tendencia es puramente estocástica, en el sentido de que todos sus coeficientes vienen determinados por las condiciones iniciales del sistema, si m es cero, y es fundamentalmente determinista, si m es distinto de cero.

Esta definición de integración sigue el esquema de análisis de Box y Jenkins (1970), pero explicitando la presencia o no de constante en la serie estacionaria debido a la importancia, que como veremos, tiene ese parámetro.

Si $h + m$ suman cero o uno la variable tiende a un equilibrio estable, cuyo valor será puramente determinista si h es cero, o vendrá determinado por las condiciones iniciales, si h es uno.

Si $h + m$ suman más de uno, la variable no tiende a un valor estable, sino que evoluciona de acuerdo con un esquema polinomial que le proporciona un crecimiento equilibrado («steady state»). De dicho esquema polinomial lo más importante a largo plazo es el coeficiente correspondiente a la mayor potencia, pues frente a él todas las demás potencias tienen una contribución despreciable. Ahora bien, ese coeficiente será determinista si m es uno, en cuyo caso lo será también la senda de largo plazo: el factor que más contribuye a dicha senda no se altera por cambios en las condiciones del sistema. Por el contrario, si m es cero todos los parámetros de la tendencia de la función de predicción dependen de las condiciones iniciales del sistema. En tales casos la ley de largo plazo viene determinada por un polinomio temporal de orden $(h-1)$, pero los parámetros de dicho polinomio cambian a medida que llegan al sistema nuevas perturbaciones.

Para completar la descripción del largo plazo de una variable económica tenemos que precisar la magnitud de la incertidumbre que tenemos sobre él. Dicha incertidumbre viene expresada por el término $e_{l+\ell}$ en [22] cuando ℓ

[2] El concepto de variables integradas fue introducido por Box y Jenkins (1970) y desarrollado posteriormente por Engle y Granger (1987); en Escribano (1986) y (1987) se aborda la generalización de dicho concepto a partir de la definición de procesos con tendencia en el enésimo momento.

tiende a infinito. Si el proceso es estacionario $h = 0$, el polinomio $\Psi(\ell)$ que entra en la definición [23] de $e_{t+\ell}$ es convergente y la varianza de $e_{t+\ell}$ cuando ℓ tiende a infinito es finita. Este resultado es cierto aún teniendo en cuenta la incertidumbre asociada a la estimación de los parámetros (véase Box y Jenkins, 1970; apéndice A7.3). En tal caso decimos que la incertidumbre respecto el futuro, no importa lo lejano que esté, está acotada. Si h no es cero, $\Psi(\ell)$ no converge y la varianza de $e_{t+\ell}$ tiende a infinito con ℓ, con lo que decimos que la incertidumbre respecto el futuro no está acotada. Conviene señalar que el que los modelos ARIMA generen, para el caso de series no estacionarias, predicciones respecto al futuro cuya incertidumbre no está acotada a medida que aumenta el horizonte de predicción (ℓ), no es un inconveniente de dichos modelos, pues la naturaleza de la incertidumbre respecto el futuro no es una característica que nos indica si el modelo es bueno o malo, sino un aspecto que define el mundo real que intentamos modelizar.

En Economía, la hipótesis de que la incertidumbre respecto el futuro no está acotada parece aceptable. Obsérvese que en un modelo SEM en donde las variables exógenas vengan generadas por modelos ARIMA no estacionarios, también generan predicciones a largo plazo sobre las variables endógenas con incertidumbre no acotada. La diferencia con las predicciones ARIMA puede darse simplemente en que la incertidumbre puede tender a infinito con mayor retraso y lentitud.

Las características de la senda de largo plazo que se derivan de los modelos ARIMA con valores para h y m más habituales se recogen en el Cuadro 1.

Un modelo ARIMA con $(h + m) = 2$ implica que a largo plazo, el nivel de la variable correspondiente tiende a infinito. Tal característica puede considerarse como inaceptable en Economía, pero obsérvese que basta sustituir una de las raíces unitarias positivas incluidas en las diferenciaciones, por $(0{,}99)^{-1}$ para que la ley de largo plazo se torne de equilibrio estable. Ahora bien, la forma en que se alcanza dicho equilibrio estable depende del componente transitorio de la función de predicción, $t_t(\ell)$, definido en [14]. Como dicho componente tendrá en este caso un término $b_j^{(t)}(0{,}99)\ell$, no se anulará a medio plazo y tal faceta, en la práctica, no se podrá distinguir de la mencionada inicialmente en que $(h + m)$ era igual a dos. De hecho el largo plazo en Economía no se puede estimar, pues no es posible discriminar, con los tamaños de muestra disponibles, entre una estructura fija y otra muy lentamente evolutiva. Por ello, cuando decimos que una variable económica sigue una senda de crecimiento lineal, queremos decir simplemente que a medio plazo tiende a seguir tal comportamiento.

Para puntualizar lo expuesto en este punto establezcamos ciertas implicaciones que se derivan de los resultados recogidos en el Cuadro 1. Para ello, comparemos en primer lugar: a) el caso en que ΔX_t es un proceso estacionario con media cero, con b) el caso en que X_t es estacionario con media μ distinta de cero.

En ambos supuestos la predicción a largo plazo es una constante. Ahora bien, si la modelización correcta es la del caso a), esa constante lo es referida a un

CUADRO 1
Características de la senda de largo plazo que se deriva del modelo ARIMA correspondiente a una variable económica

$h+m$, naturaleza de la senda de largo plazo (1)	(h, m) (2)	Influencia de las condiciones iniciales en la senda de largo plazo	Incertidumbre respecto el largo plazo	
			Sobre el nivel	Sobre la tasa de crecimiento (3)
0, Valor nulo a largo plazo	(0,0)	ninguna	finito	nula (el crecimiento es cero)
1, Equilibrio estable	(0,1)	ninguna	finita	nula (el crecimiento es cero)
	(1,0)	determinan el valor de equilibrio	infinita (crece linealmente con)	nula (el crecimiento es cero)
2, Crecimiento lineal	(1,1)	determinan la ordenada en el origen de la recta, pero no influyen en su pendiente	infinita (crece linealmente con)	finita
	(2,0)	determinan los dos parámetros que definan la recta	infinita (crece cuadráticamente con)	infinita (crece linealmente con)

(1) h es el número total de diferenciaciones que requiere la variable para convertirse en estacionaria.
(2) $m = 0$ implica que la esperanza matemática de la serie estacionaria es nula.
$m = 1$ implica que dicha esperanza matemática no es nula.
(3) Se supone que el modelo ha sido construido sobre la transformación logarítmica de los datos. En caso que el modelo se haya formulado sobre la serie original, esta columna se referiría a incrementos de dicha serie.

determinado conjunto de condiciones iniciales: si con la información disponible en t esa constante está evaluada en $b_0^{(t)}$, cuando se está en $t + 1$ y en consecuencia, el conjunto de condiciones iniciales se ha modificado con la incorporación de X_{t+1}, tendremos que el nuevo equilibrio a largo plazo será $b_0^{(t+1)}$, y, en general, $b_0^{(t+1)}$ será distinta de $b_0^{(t)}$.

Por el contrario, en el supuesto de que x_t sea un proceso estacionario con media μ, el equilibrio a largo plazo será siempre igual a μ, con independencia de las condiciones iniciales en que se encuentre el fenómeno bajo estudio.

Comparemos ahora dos casos en los que la función de predicción a largo plazo es una recta. Comenzando con el que implica ($h = 2, m = 0$) tenemos que si definimos $W_t = \Delta X_t$, W_t no es más que la velocidad de la serie X_t. Ahora bien, es inmediato que la transformación estacionario es $\Delta^2 X_t = \Delta W_t$, o lo que es lo mismo, W_t tiene, de acuerdo con el ejemplo precedente, un equilibrio a largo plazo caracterizado por una constante que se modifica con las condiciones iniciales.

Estamos diciendo entonces que a largo plazo X_t presenta un crecimiento constante («situación de crecimiento equilibrado»), aunque el valor de esa constante cambia con el origen de la predicción, al incorporar nueva información sobre factores que afectan a X.

Una situación similar se presenta cuando en ($h = 2, m = 0$) una diferenciación es de tipo estacional. En tal caso, salvo por el carácter estacional de la ordenada en el origen, se reproducen fielmente los resultados anteriores sobre la senda de equilibrio a largo plazo.

Tomemos ahora el caso en que ($h = 1, m = 1$) y, por tanto, ΔX_t sigue un proceso estacionario de media μ. Tal y como comentamos anteriormente, en este caso la pendiente de la recta de predicción a largo plazo siempre toma el mismo valor: eso significa que cualesquiera que sean los factores que afecten al fenómeno que estudiamos su tasa de crecimiento de equilibrio a largo plazo se mantiene inalterada.

Podemos extraer de esto una importante conclusión: *la inclusión de constantes en el modelo ARIMA supone fuertes restricciones sobre la caracterización del largo plazo de una variable económica.*

Habiendo visto que los parámetros de la función de predicción de un modelo ARIMA, y en concreto la pendiente de la tendencia del componente permanente, cambian en el tiempo, es importante analizar cómo los podemos calcular. A ello se dedica la sección siguiente.

5. La determinación de los componentes de la función de predicción

5.1. Planteamiento general

Los resultados de las secciones anteriores indican que la ecuación de predicción final de un modelo ARIMA estacional puede escribirse:

$$\hat{X}_t(\ell) = \sum_{j=0}^{d} c_j^{(t)} \ell^j + \sum_{h=1}^{s} \delta_{h\ell} S_\ell^{(t)} + \sum_{i=1}^{n} b_i G_i^\ell \quad , \qquad [24]$$

donde suponemos para simplificar que $\mu = 0$ y $D = 1$ y $\delta_{\eta}\ell$ es uno cuando la estación del año a la que corresponde $t + \ell$ coincide con la estación h y cero en los demás casos. La ecuación [24] tiene d parámetros c_j, $s-1$ parámetros estacionales (ya que un coeficiente puede expresarse como la suma de los demás con signo cambiado) y n coeficientes b_i. Entonces $n = p + P \cdot s$ y la ecuación es válida para $\ell > q + sQ$. Sin embargo, como se requieren $d + s - 1 + p + sP$ valores iniciales para determinarla, a partir de $\ell > q + sQ - d - s + 1 - p - sP$ las predicciones ya estarán relacionadas entre sí según el esquema [24]. Los coeficientes de esta ecuación pueden obtenerse por dos procedimientos distintos: el primero es generar tantas predicciones como parámetros y resolver el sistema de ecuaciones resultante. Por tanto, necesitamos generar un número de predicciones igual a $R = d + s - 1 + n$. Llamando $\hat{\mathbf{X}}_{t+R}$ al vector de predicciones y θ al vector de parámetros, podemos escribir a partir de cierto instante ℓ:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_t(\ell) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{X}_{t(+R)} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & & G_1 & G_2 & \cdots & G_n \\ 1 & 2 & & 2^d & 0 & 1 & \cdots & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & 1 & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & 1 & & 0 & & & & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & & 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & & & & & & \\ 1 & R & & R^d & & & & & G_1^R & G_1^R & & G_n^R \end{array}\right] \begin{bmatrix} c_0^{(t)} \\ \cdot \\ c_d^{(t)} \\ S_1^{(t)} \\ S_{s-1}^{(t)} \\ b_1^{(t)} \\ b_n^{(t)} \end{bmatrix}$$

y el coeficiente $S_s^{(t)}$ será igual a

$$-\sum_{j=1}^{s-1} S_j^{(t)}$$

Escribiendo:

$$\hat{\mathbf{X}}_{t+R} = \mathbf{M}\,\theta$$

donde **M** es la matriz de datos que contiene los coeficientes conocidos que multiplican al vector de parámetros θ resulta:

$$\theta = \mathbf{M}^{-1}\,\hat{\mathbf{X}}_{t+r} \qquad [25]$$

que permite obtener todos los parámetros de la ecuación de predicción final.

El segundo procedimiento es obtener primero un valor r lo suficientemente grande para que el componente transitorio se anule para $k > r$. Este valor depende de las raíces del polinomio autorregresivo y se determina de manera que $|G_1| \simeq 0$, donde G_1 es la G_i con mayor valor absoluto. Una forma simple de comprobar que el componente transitorio es prácticamente nulo para $k > j \cdot s$, consiste en tomar las diferencias:

$$\hat{X}_t((j+1)s+k) - \hat{X}_t(js+k) \quad ,$$

que estarán libres del efecto estacional, y observar si tal diferencia se mantiene prácticamente constante para valores positivos de k. En tal caso diremos que a partir de un horizonte de predicción $j \cdot s$ el componente transitorio es prácticamente nulo. Por ejemplo esto implica que con datos mensuales las diferencias entre la predicción de un mes específico sobre la predicción del mismo mes del año anterior sean constantes a partir de cierto año. Tomando entonces la expresión de las predicciones generales eliminando de ella el componente transitorio, podemos plantear un sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes de la ecuación de tendencia y los coeficientes estacionales, que son en general los de interés. Vamos a ver algunos casos particulares.

5.2. *El modelo de las líneas aéreas:*

Un modelo ARIMA estacional muy utilizado para representar la evolución de series económicas mensuales es el llamado modelo de las líneas aéreas:

$$\Delta\Delta_{12} X_t = (1 - \theta_1 L)(1 - \theta_{12} L^{12}) a_t \qquad [26]$$

Según lo estudiado anteriormente, la ecuación de predicción de este modelo para $k > 0$ puede escribirse:

$$\hat{X}_t(k) = b_0^{(t)} + b_1^{(t)} k + S_k^{(t)}$$

y contiene 13 parámetros (recuérdese que $\Sigma S_k^{(t)} = 0$). Igualando las predicciones para $k = 1, 2, \ldots, 13$ obtenidas con el modelo [26] con la forma estructural [27] tendremos:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_t(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{X}_t(12) \\ \hat{X}_t(13) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ 1 & 12 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 13 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0^{(t)} \\ b_1^{(t)} \\ S_1^{(t)} \\ \cdot \\ \\ S_{12}^{(t)} \end{bmatrix}$$

sistema de 13 ecuaciones y 14 incógnitas que con la restricción $\Sigma S_j^{(t)} = 0$ permite obtener los parámetros $b_0^{(t)}$, $b_1^{(t)}$ y los coeficientes estacionales previstos $S_j^{(t)}$.

Restando la primera ecuación de la última y dividiendo por 12, se obtiene directamente:

$$b_1^{(t)} = \frac{\hat{X}_t(13) - \hat{X}_t(1)}{12} \qquad [27]$$

Sumando las 12 primeras ecuaciones se anulan los coeficientes estacionales y se obtiene:

$$\bar{X}_t = \frac{1}{12} \sum_{1}^{12} X_t(k) = b_0^{(t)} + b_1^{(t)} \left(\frac{1 + \ldots + 12}{12} \right) ,$$

que resulta en

$$\hat{b}_0^{(t)} = \hat{X}_t - \frac{13}{2} \hat{b}_1^{(t)} . \qquad [28]$$

Finalmente los coeficientes estacionales se obtienen de:

$$S_j^{(t)} = \hat{X}_t(t) - \hat{b}_0^{(t)} - \hat{b}_1^{(t)} j \qquad [29]$$

Obsérvese que si el modelo ARIMA se especifica sobre la transformación logarítmica de X, entonces los coeficientes $b_1^{(t)}$ pueden interpretarse como tasas de crecimiento y los coeficientes S_j miden la estacionalidad en tanto por uno sobre el nivel de la serie.

5.3. *Modelos generales con una diferencia de cada tipo*

Cualquier modelo ARIMA que tenga como operadores no estacionarios $\Delta\Delta_s$ y $\mu = 0$, tiene un componente permanente de la función de predicción que es la suma de una tendencia lineal y un componente estacional estable. Para determinar los parámetros b, que miden la tendencia lineal y los coeficientes estacionales S_j, utilizaremos que, tomando $k = si + j$ suficientemente grande de manera que los términos estacionarios sean despreciables, e igualando las predicciones al componente permanente:

$$\hat{b}_1 = \frac{\hat{X}_t(k + s + 1) - \hat{X}_t(k+1)}{s} \qquad [30]$$

$$\hat{b}_0 = \bar{X}_t - \hat{b}_1 \left(k + \frac{s+1}{2} \right) \qquad [31]$$

$$S_j^{(t)} = \hat{X}_t(k+j) - \hat{b}_0 b_1 (k+j) . \qquad [32]$$

ecuaciones análogas a las [27], [29], donde ahora $\bar{X}$ es la media de las s observaciones en el intervalo, $(k+1, k+s)$.

6. Aplicación del cálculo de la tendencia de la función de predicción univariante al análisis de series de la economía española

En esta sección se estima, para una cierta secuencia de meses, las tasas de crecimiento de la tendencia de la función de predicción de las siguientes series de la economía española: índice de producción industrial y efectivo en manos del público. La utilización de la mencionada tasa en un análisis relativamente completo de la situación coyuntural de un fenómeno económico se propone y describe en Espasa (1990). Siguiendo la terminología utilizada en el trabajo mencionado, denominaremos *inercia a la tasa de crecimiento de la tendencia* de la función de predicción de un modelo ARIMA univariante, que vendrá dada por el parámetro b_1, definido en [30], cuando el modelo se especifica sobre la transformación logarítmica de la variable.

Sobre el *índice mensual de producción industrial,* IPI (véase gráfico 1) Morales *et al.* (1989) proponen el siguiente modelo:

$$\Delta\Delta_{12}\ln \mathrm{IPI}_t = \Delta\Delta_{12}\mathrm{AI}_t + (1-0{,}74L)\,(1-0{,}79L^{12})\,\alpha_t \qquad [33]$$

$$\sigma = 0{,}019 \ ,$$

en donde AI_t recoge un conjunto de variables artificiales que captan determinados efectos de calendario e intervenciones que afectan al IPI. Estas variables artificiales no afectan prácticamente a la tendencia de la función de predicción y para los fines de este artículo podemos ignorarlas.

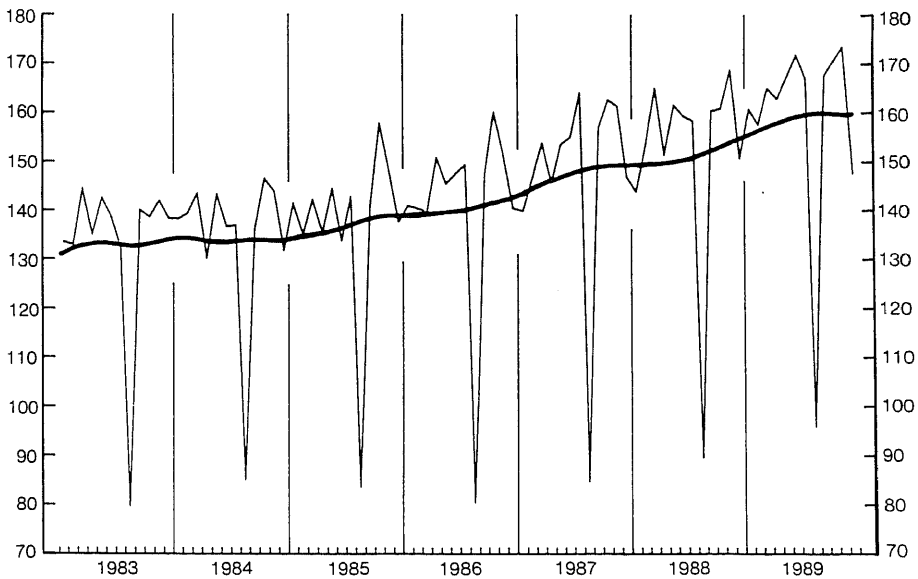

Gráfico 1

Indice de Producción Industrial
(Serie original y tendencia)

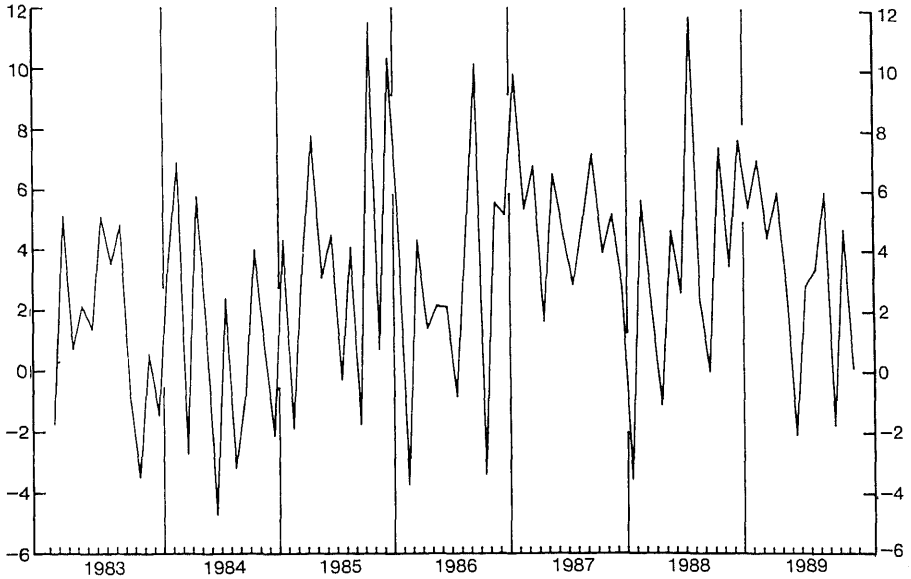

Gráfico 2

Crecimiento anual del Indice de Producción Industrial (*)

(*) Crecimiento de un mes sobre el mismo mes del año anterior, en la serie original. El crecimiento se representa asignándolo, en cada caso, al momento central del período de tiempo delimitado por los dos meses correspondientes.

Aplicando la fórmula [27] podemos calcular la inercia del IPI. En el Gráfico 3 se recoge, dicha inercia desde julio de 1987 a diciembre de 1988. Del gráfico se deduce que las expectativas han mostrado sistemáticamente una ligera recuperación a lo largo de 1988. Así, de una expectativa de crecimiento a medio plazo del 2,8 % en enero de 1988 se ha pasado a un 3,1 % en diciembre de dicho año. El análisis de la inercia del IPI durante 1988 ha dado siempre un mensaje claro, consistente en que el crecimiento industrial no se estaba debilitando, sino que ciertamente se mantenía estable e incluso mostraba una evolución al alza. Esta conclusión, que ha sido muy firme a lo largo de todos los meses de 1988, contrasta con el análisis de los crecimientos de un mes respecto el mismo mes del año anterior, que a medida que han ido apareciendo han causado, en ocasiones, bastante confusión, especialmente en el mes de octubre.

Para la serie trimestral de *dinero en efectivo en manos del público* (E), con la muestra 1978 (I) a 1988 (IV) se ha construido el siguiente modelo[3].

$$\Delta\Delta_4 \ln E_t = \Delta\Delta_4 \, AIE_t + (1 - 0{,}63L^4)\ \alpha_t \qquad [34]$$

$$\sigma = 0{,}0073,$$

[3] Estamos agradecidos a Rosa Gómez por facilitarnos el modelo.

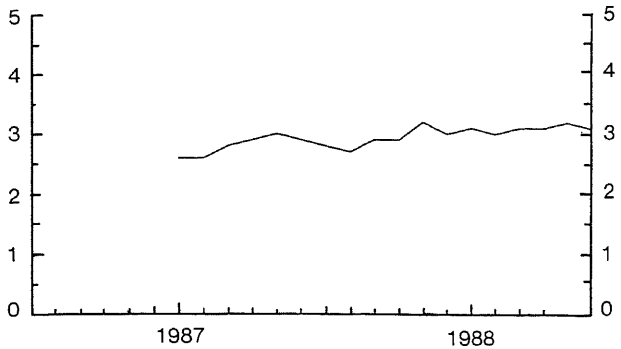

Gráfico 3
Indice de Producción Industrial

donde AIE_t viene dado por:

$$AIE_t = -0{,}0145\ D80I_t + \frac{0{,}035 + 0{,}037L + 0{,}025L^2}{(1 - 0{,}65L)}\ D82IV_i \qquad [35]$$

en donde *DF* es una variable artificial impulso con el valor unidad correspondiente al trimestre *F* y cero en los demás.

En [34] tenemos que AIE_t recoge una intervención determinística sobre el efectivo, cuyo efecto sobre la función de predicción fue pasajero y no afecta al período en el cual vamos a calcular el crecimiento de su tendencia. Por eso, en lo que sigue, procedemos como si el modelo no incluyese el componente AIE.

Aplicando la fórmula [30] para el caso de series trimestrales, es decir con $s = 4$, podemos calcular la inercia del efectivo en manos del público. Dicha inercia se representan trimestre a trimestre desde 1986 (I) a 1988 (IV) en el Gráfico 4. En él destaca que durante 1987 la inercia del efectivo fue muy estable alrededor del 13 %, por el contrario durante 1988 ha mostrado un crecimiento sostenido hasta situarse ligeramente por encima del 14 %.

El efectivo en manos del público, junto con los depósitos a la vista en el sistema bancario, forma la definición más líquida del dinero en una economía, y se le denomina *M*1. Durante el período considerado el efectivo en manos del público ha supuesto una proporción relativamente constante, alrededor del 33-35 %, de *M*1. El Gráfico 4 ilustra que las expectativas de crecimiento a medio plazo (inercia) de este componente más líquido del dinero han ido aumentando en los tres años considerados, de modo que al finalizar 1988 tales expectativas son de casi dos puntos porcentuales por encima de las que se tenían a comienzos de 1986. Esta parte líquida del dinero ha registrado, por tanto, una aceleración en su evolución durante los últimos tres años, especialmente a lo largo de 1988.

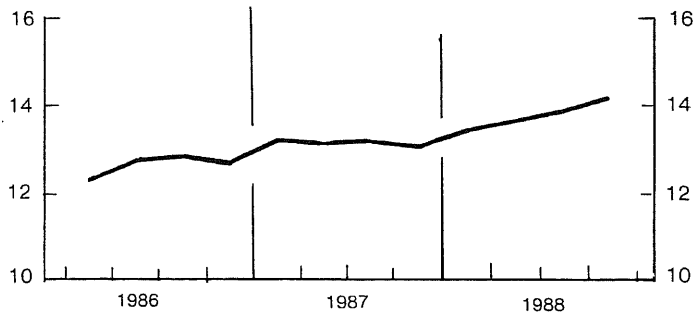

Gráfico 4
Efectivo en manos del público

El gráfico 4 pone también de manifiesto la flexibilidad de los modelos ARIMA como esquemas de predicción. En efecto, como hemos visto en secciones anteriores la función de predicción de los modelos ARIMA viene dominada básicamente por un polinomio temporal con coeficientes que van cambiando en el tiempo. En el caso del efectivo (propiamente dicho en su transformación logarítmica) dicho polinomio es una línea recta y el Gráfico 4 muestra cómo la pendiente de dicha recta ha ido aumentando de forma significativa en los últimos años. Esta adaptación tendencial de la función de predicción de los modelos ARIMA a los últimos cambios que experimenta la serie, recoge una característica muy real de las series económicas y de ahí que tales modelos se hayan revelado como esquemas muy útiles para la predicción económica.

Referencias

Box, G. E. P. y Jenkins, G. M. (1970): *Time Series Analysis, Forecasting and Control,* Holden Day.

Engle, R. F. y Granger, C. W. J. (1987): «Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing», *Econometrica, núm. 55,* págs. 251-76.

Escribano, A (1986): «Identification and Modelling of economic relationships in a growing economy», tesis doctoral (Ph. D.), University of California, San Diego.

Escribano, A. (1987): «Co-Integration, Time Co-Trends and Error-Correction Systems: an alternative Approach», *CORE Discussion Paper, núm. 8715,* Universite Catholique de Louvain.

Espasa, A. (1990): «Metodología para realizar el análisis de la coyuntura de un fenómeno económico», Banco de España, documento de trabajo 9003.

Koopmans, T. C. y Hood, WM. C. (1953): «The estimation of simultaneous linear economic relationships», capítulo VI del libro *Studies in Econometric Methods,* monografía n. 14 de la Cowles Foundation, editado por WM. C. Hood y T. C. Koopmans.

Morales, E.; Espasa, A. y Rojo, M. L. (1989); «Análisis de la actividad industrial española», trabajo no publicado.

Peña, D. (1987): *Estadística. 2 Modelos lineales y series temporales,* Alianza Universidad. Textos.

Peña, D. (1989): «Sobre la interpretación de modelos ARIMA univariantes», *Trabajos de Estadística,* 4, 2, págs. 19-45.

Prothero, D. L. y Wallis, K. F. (1976): «Modelling Macroeconomic Time Series», *J. of the Royal Statistical Society, Serie A, núm. 139,* Part 4, págs. 468-85.

Quenouille, M. H. (1957): *The Analysis of Multiple Time Series,* C. Griffin and Co., London.

Tiao, G. C. y Box, G. E. P. (1981): «Modelling multiple time series with applications», *J. of the American Statistical Association,* vol. 76, *núm. 376,* diciembre, págs. 802-816.

Wallis, K. F. (1977): «Multiple Time Series Analysis and the Final Form of Econometric Models», *Econometrica,* v. 45, *núm. 6,* septiembre, págs. 1481-98.

Wallis, K. F. (1980): «Econometric Implications of the Rational Expectations Hyphotesis», *Econometrica,* v. 48, *núm. 1.*

Zellner, A. y Palm, F. (1974): «Time Series Analysis and Simultaneous Equation Econometric Models», *J. of Econometrics,* v. 2, *núm. 1,* mayo, págs. 17-54.

Zellner, A. (1979): «Statistical Analysis of Econometric Models», *J. of the American Statistical Association,* v. 74, *núm. 367,* septiembre, págs. 628-651.

Abstract

This work shows how to decompose an univariate ARIMA model as the sum of the trend, the seasonal component and the irregular. The decomposition is made from the forecast function of the ARIMA model and it illustrates the structural features of these models.

Recepción del original, julio de 1989
Versión final, marzo de 1990