

PENSIONES, CRECIMIENTO ECONÓMICO Y ENVEJECIMIENTO POBLACIONAL

JULIO LÓPEZ DÍAZ
ZENÓN J. RIDRUEJO
Universidad de Valladolid

Este trabajo analiza el efecto que a largo plazo tiene el envejecimiento demográfico sobre la tasa de crecimiento económico en una economía abierta. El marco de análisis es un modelo de crecimiento endógeno, capital humano y generaciones solapadas, el cual incorpora un sistema de Seguridad Social de reparto. El resultado obtenido sugiere que el envejecimiento poblacional puede disminuir el crecimiento económico a largo plazo.

Palabras clave: Esperanza de vida, Seguridad Social, capital humano, crecimiento endógeno, generaciones solapadas.

(JEL H55, J14, O4)

1. Introducción

Como es conocido, la mayoría de los países desarrollados se caracterizan por experimentar un proceso de envejecimiento poblacional, consecuencia del descenso en la natalidad y del incremento en la expectativa de vida de sus habitantes. Así, si nos centramos en el caso español¹, el número de nacimientos ha disminuido desde los 697.697 habidos en 1964 a los 369.035 observados en 1997, si bien es cierto que se espera una cierta recuperación de la fecundidad, de forma que se pase de 1,16 hijos por mujer en 1996 a 1,60 en 2025. En relación con la esperanza de vida, en 1991 la expectativa al nacer era de 73,40 años para los hombres y de 80,49 años para las mujeres, y aumentará a 77,18 y 83,91 años, respectivamente, en 2025. Este fenómeno demográfico tiene una indudable repercusión económica, susceptible de ser

Los autores queremos agradecer los comentarios de los asistentes al XXIV Simposio de Análisis Económico, el asesoramiento de Guiomar Martín y las sugerencias de los dos evaluadores anónimos, los cuales han contribuido a la mejora del trabajo. No obstante, somos totalmente responsables de los errores que puedan subsistir.

¹Todos los datos demográficos de la introducción provienen del trabajo de Fernández Cordon (1998).

valorada desde una doble perspectiva, ya que empeora la salud financiera del sistema de Seguridad Social vigente y, en un contexto de más largo plazo, afecta al ritmo de crecimiento económico.

Con relación a la primera de las consecuencias, el envejecimiento poblacional incrementa el peso de la población mayor de 65 años (en España pasará del 13,7% del total en 1991, al 21,0% en el año 2026), lo que aumenta el número de pensionistas por cotizante potencial a la Seguridad Social -lo que se conoce como ratio de dependencia: en España dicho ratio aumentará del 20,6% en 1991 al 32,5% en 2026. Como el sistema de pensiones es de reparto, es decir, son los cotizantes de un período los que con sus aportaciones financian las prestaciones que reciben los jubilados de ese mismo período, la preocupación por la posible quiebra del sistema de pensiones está más que justificada, inquietud que, como observa Herce (1997), es compartida por todos los estudios que se han llevado a cabo para la economía española.

Dada su importancia, se han estudiado numerosos aspectos relacionados con la Seguridad Social, destacando la posibilidad de sustituir el sistema de pensiones de reparto por otro de capitalización, en el que las cotizaciones revierten en el futuro sobre los mismos individuos, sabiendo que en la fase de transición se deben financiar las prestaciones no sólo de los pensionistas presentes, sino también de los venideros. En este sentido, tradicionalmente se ha considerado que dicha transición empeorará necesariamente al menos a una de las dos generaciones afectadas, como justifican Brunner (1996) y Casarico (1998), y sólo recientemente se observa cierta discrepancia al respecto. Así, autores como Breyer y Straub (1993), o Hirte y Weber (1997), consideran posible una mejora paretiana durante la transición, motivada por la desaparición de distorsiones en la decisión trabajo-ocio asociadas a la existencia de cotizaciones salariales.

Otro tema tratado es la interacción entre demografía y Seguridad Social. En una dirección, como exponen en su panorámica Ehrlich y Lui (1997), se estudia el papel de la Seguridad Social como determinante de la fecundidad, como por ejemplo en Nerlove, Razin y Sadka (1986). En sentido contrario, López García (1988) analiza los efectos de cambios en la tasa de crecimiento de la población sobre el nivel de bienestar bajo los sistemas de pensiones de reparto y capitalización; Jackson (1989) estudia el efecto del envejecimiento poblacional sobre la edad de retiro o los niveles de las pensiones, al igual que lo hacen Meijdam y Verbon (1996, 1997). En cuanto al caso español, Eguia (1997) simula los efec-

tos de una caída en la natalidad, una mayor esperanza de vida, y un retraso en la edad de jubilación, utilizando un modelo de ciclo vital “a la Blanchard” sin crecimiento económico en su estado estacionario. En la misma línea, Montero (2000) estudia los efectos del envejecimiento de la población sobre la viabilidad del sistema de pensiones, utilizando un modelo de equilibrio general con generaciones solapadas computado para la economía española, en el que el crecimiento se genera exógenamente.

Desde otro punto de vista, y adoptando una perspectiva de más largo plazo, el aumento de la expectativa de vida se identifica como un posible factor de crecimiento económico, cuestión ya resaltada por Barro y Sala-i-Martin (1995). Sin embargo, a pesar de su importancia, apenas existen trabajos que dentro de la moderna teoría del crecimiento endógeno analicen la interacción entre crecimiento económico y distintos considerandos demográficos², constituyendo una excepción los trabajos de de la Croix y Licandro (1999), y de Boucekkine, de la Croix y Licandro (2000). El primero de ellos considera un modelo de crecimiento endógeno con capital humano y sin capital físico, con generaciones solapadas e incertidumbre sobre el tiempo de vida, donde los agentes eligen el momento de abandonar el aprendizaje y empezar a trabajar, observando que una mayor esperanza de vida afecta positivamente al tiempo dedicado a la educación, y por tanto, a la tasa de crecimiento, aunque este último efecto puede verse compensado por una reducción en la tasa de participación. El segundo trabajo, basado en el mismo escenario productivo, pero en un marco poblacional más realista, permite a los agentes elegir no sólo la edad de incorporación al mercado laboral, sino también la de retiro, analizándose todo un conjunto de interacciones entre considerandos demográficos y tasas de crecimiento económico.

En definitiva, podría decirse que tradicionalmente se ha analizado el efecto que el cambio en la estructura demográfica genera sobre el nivel de la pensión por jubilado y que sólo muy recientemente unos pocos trabajos estudian su influencia sobre el ritmo de crecimiento económico, sin referencia alguna a cuestiones vinculadas a la Seguridad Social

² Hay trabajos que se han preocupado de la interacción entre crecimiento económico y Seguridad Social, como los de Caballé (1995), Zhang (1995), Wiedmer (1996), Fuster (1997), y Zhang y Zhang (1998), si bien es cierto que consideran agentes con certidumbre sobre su horizonte vital, los cuales viven dos o tres periodos de tiempo, según el caso, lo que impide el análisis de cuestiones relacionadas con la estructura demográfica, como el envejecimiento.

o a otros considerandos de índole demográfico o formativo. A este respecto, la principal aportación del presente trabajo radica en el intento de enlace de ambos escenarios de análisis, al estudiar los efectos que la mayor expectativa de vida genera sobre el ritmo de crecimiento económico y, en consecuencia, de las pensiones que perciben los jubilados. Para ello se utiliza un modelo de crecimiento endógeno, capital humano y generaciones solapadas, representativo de una economía abierta poseedora de un sistema de Seguridad Social basado en el reparto y en la que los agentes económicos tienen un horizonte de vida finito e incierto.

El trabajo se estructura como sigue. En la segunda sección se explica el modelo, analizando especialmente el efecto que sobre la tasa de acumulación del capital humano agregado genera el aumento en la esperanza de vida, en la tercera se realiza un sencillo ejercicio de simulación que corrobora los resultados obtenidos a nivel teórico, y en la cuarta se exponen las principales conclusiones.

2. El modelo

2.1. Estructura demográfica

Como en Blanchard (1985), en cada instante nace una cohorte de individuos con una probabilidad de muerte por unidad de tiempo p , constante, independiente de su edad y determinante de su esperanza de vida³, $1/p$. Cada cohorte es lo suficientemente grande como para que p sea también la tasa a la que determinísticamente decrece su tamaño a lo largo del tiempo. Así, si el tamaño de una cohorte en el momento de su nacimiento es n , el de una cohorte nacida hace v períodos será $n \exp[-p(t - v)]$, siendo el volumen total de la población en el momento actual t :

$$\int_{-\infty}^t n \exp[-p(t - v)] dv = \frac{n}{p} \quad [1]$$

³Boucekkine, de la Croix y Licandro (2000) consideran una estructura demográfica más general y realista, siendo la formulación de Blanchard un caso particular de la misma.

En el mismo sentido, si j es la edad de jubilación, se pueden definir las poblaciones en edad de trabajar y jubilada como:

$$\int_{t-j}^t n \exp[-p(t-v)]dv = \frac{n}{p} (1 - \exp[-jp]) \quad [2]$$

$$\int_{-\infty}^{t-j} n \exp[-p(t-v)]dv = \frac{n}{p} \exp[-jp] \quad [3]$$

Finalmente, dentro de la población en edad de trabajar, si denotamos como t^* a la edad que tienen los individuos cuando deciden incorporarse al mercado laboral, variable endógena cuya determinación se estudiará en la sección 2.2, podemos definir $L(t)$ como la población que efectivamente trabaja:

$$L(t) = \int_{t-j}^{t-t^*} n \exp[-p(t-v)]dv = \frac{n}{p} (\exp[-t^*p] - \exp[-jp]) \quad [4]$$

2.2. *Sector productivo*

La función de producción, cuyos factores son el capital físico y el trabajo efectivo, presenta rendimientos constantes a escala. Bajo perfecta movilidad internacional del capital, nuestra pequeña economía acepta el tipo de interés que le viene dado desde el exterior r , el cual es constante a lo largo del tiempo. Suponiendo competencia perfecta en los mercados de factores, este tipo de interés determina la productividad marginal del capital y, por tanto, el salario abonado por unidad de trabajo eficiente, que vuelve a ser constante. Bajo estas premisas la evolución del producto viene determinada exclusivamente por el ritmo de acumulación del capital humano agregado:

$$\gamma_y = \gamma_H = \gamma \quad [5]$$

2.3. *Comportamiento individual*

En cada momento de tiempo t , un individuo nacido en el instante $v < t$ maximiza su utilidad intertemporal esperada:

$$\int_t^\infty \exp[-(p + \rho)(s-t)] \ln c(v, s) ds \quad [6]$$

donde $c(v, s)$ denota el consumo en el momento s de un individuo nacido en el momento v . La tasa de descuento efectivo es el resultado

de sumar la tasa de descuento subjetivo, ρ , y la probabilidad de muerte, p .

Los individuos pueden acumular no sólo capital financiero (como en Blanchard (1985)) sino también capital humano (como en Bovenberg y van Ewijk (1997)), cuya acumulación está determinada, siguiendo a Lucas (1988), por el aprendizaje. En consecuencia, los individuos dividen el tiempo total disponible, normalizado a la unidad, entre aprender $u(v, t)$ y trabajar $(1 - u(v, t))$. En este sentido, y siguiendo la especificación de Ben-Porath (1967), la función de aprendizaje, que muestra la tasa de crecimiento en t del capital humano de un individuo nacido en el momento v , $h(v, t)$ viene dada por:

$$\frac{\dot{h}(v, t)}{h(v, t)} = \begin{cases} \alpha u(v, t) & \text{si } v < t < v + j \\ 0 & \text{si } t \geq v + j \end{cases} \quad [7]$$

donde un punto sobre una variable representa su derivada con respecto al tiempo. Obsérvese que, como es lógico, el individuo tan sólo tiene incentivos a acumular capital humano antes de alcanzar la edad de jubilación. Por otro lado, debe señalarse que el ritmo de crecimiento del capital humano individual depende tanto del tiempo dedicado a la formación $u(v, t)$, como de su capacidad de aprendizaje α , considerada a efectos simplificadores igual para todos los individuos que integran la economía.

Asimismo, como en Blanchard (1985), todos los individuos contratan seguros de vida. Las aseguradoras pagan una cuota periódica a los individuos mientras están vivos, que es una proporción de la riqueza financiera de cada asegurado, siendo a cambio las beneficiarias de su riqueza financiera $a(v, t)$ cuando muere, comprometiéndose adicionalmente a saldar las deudas contraídas por el individuo si éste fallece antes de que obtenga ingresos laborales. Estas compañías acceden libremente al mercado, guiándose por la condición de beneficio cero, lo cual implica que proporcionan a los individuos una tasa p sobre su riqueza. En consecuencia, el capital financiero del individuo se acumula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\dot{a}(v, t) = (r + p)a(v, t) + y(v, t) - c(v, t) \quad [8]$$

donde $y(v, t)$ representa la renta en el instante t de un individuo nacido en el momento v , la cual tendrá carácter laboral o asistencial según la edad del agente:

$$y(v, t) = \begin{cases} w(1 - \tau)(1 - u(v, t))h(v, t) & \text{si } v < t < v + j \\ b(v, t) & \text{si } t \geq v + j \end{cases} \quad [9]$$

representando w el salario bruto percibido, τ la tasa de cotización a la seguridad social y $b(v, t)$ la pensión recibida por cada individuo una vez que haya alcanzado la edad de jubilación.

Por otro lado, los recién nacidos comienzan sus vidas sin riqueza financiera alguna, debido a que los que fallecen transmiten su riqueza a las compañías de seguros, lo que implica que $a(v, v) = 0$. Sin embargo, como en Bovenberg y van Ewijk (1997), sí poseen una dotación inicial de capital humano, función del capital humano por trabajador existente al nacer⁴:

$$h(v, v) = \chi \frac{H(v)}{L(v)} \quad [10]$$

donde $H(v)$ y $L(v)$ denotan, para el instante v , al capital humano agregado y a la población trabajadora, respectivamente, y representando χ el grado de asimilación. Adoptando como supuesto simplificador la coincidencia de las tasas de descuento subjetiva y objetiva ($r = \rho$), cada individuo selecciona el consumo y la fracción de tiempo dedicado a la formación que maximiza su utilidad esperada sujeta a la función de aprendizaje y a la restricción presupuestaria. Como consecuencia de dicho comportamiento, los agentes deciden consumir (ver apéndice A1) la siguiente cantidad:

$$c(v, t) = (r + p)[d(v, v + j) + a(v, v + j)] \quad [11]$$

donde $a(v, v + j)$ y $d(v, v + j)$ representan, respectivamente, la riqueza financiera y el valor esperado de las pensiones futuras, valoradas en el momento de la jubilación del individuo. En el apéndice matemático, se demuestra que todos los individuos deciden dedicar la primera parte de su vida únicamente a formarse ($u = 1$) —lo que constituiría la etapa de escolarización— para en una segunda fase exclusivamente trabajar ($u = 0$), al igual que sucedía en de la Croix y Licandro (1999). En otras palabras, como se muestra en el mismo apéndice, el comportamiento optimizador de los individuos les lleva a inicialmente sólo estudiar, debido a que en esa etapa el valor marginal de producir una unidad de capital humano es superior al valor marginal de utilizar ese capital humano en la producción de capital físico, decidiendo abandonar dicho período de aprendizaje y comenzar por tanto a trabajar cuando ambos

⁴Bovenberg y van Ewijk (1997) consideran que dicha fracción es una variable aleatoria, introduciendo así desigualdades intrageneracionales.

valores marginales coinciden, lo que se produce cuando el individuo alcanza la edad t^* , definida como:

$$t^* = j + \frac{\log[1 - \frac{r+p}{\alpha}]}{r+p} \quad [12]$$

Más concretamente, cuando el individuo alcanza la edad t^* obtiene el mismo valor marginal por invertir su riqueza en capital físico ($r+p$) que en capital humano $\alpha(1 - \exp[-(r+p)(j-t^*)])$. A este respecto, y puesto que el capital humano tiene como coste de obsolescencia $\exp[-(r+p)(j-t^*)]$ (ya que cuando el individuo se jubila su capital humano pierde todo el valor), α debe ser mayor que $(r+p)$, pues de lo contrario el comportamiento óptimo del individuo sería no invertir en capital humano en ningún momento de su vida.

De la expresión [12] se deduce que la edad de incorporación al mercado de trabajo es la misma para todos los individuos y que puede variar por varios motivos. Así, en la medida en que dada la estructura del modelo no es posible que un individuo acumule simultáneamente capital humano y capital financiero, cuanto menor sea el tipo de interés que retribuye el capital financiero menor será el coste de oportunidad del período de escolarización, lo que incentiva su prolongación. Igualmente, una mayor capacidad de aprendizaje —un mayor α — incrementa la rentabilidad del tiempo dedicado al estudio por cuanto logra una mayor acumulación de capital humano, lo que contribuye a una incorporación más tardía al mercado laboral, resultado que está en consonancia con el obtenido tradicionalmente por la literatura que estudió en los años sesenta y setenta la determinación de la renta durante el ciclo vital, como las aportaciones de Ben-Porath (1967), Sheshinki (1968) y Spence (1973), entre otros. Por otro lado, la edad de incorporación al mercado laboral será tanto más elevada cuanto mayor sea la edad de jubilación —un mayor j —, ya que los individuos disponen de un mayor horizonte laboral en el que recoger los frutos de un período de escolarización más prolongado. Por último, una esperanza de vida más alta —un menor p — proporciona al individuo un mayor respaldo a su decisión de sacrificar ingresos presentes por la expectativa de obtener rentas futuras más elevadas, lo que contribuye a alargar su etapa de formación.

2.4. *Crecimiento del capital humano agregado*

Obsérvese que el momento de abandonar los estudios y de incorporarse al mercado laboral no depende del stock de capital humano inicial, por

lo que todos los individuos toman esta decisión a la misma edad. Como consecuencia, la evolución del capital humano individual es uniforme entre todos los individuos, diferenciándose sólo en que estén trabajando o no, lo que permite obtener una relación estacionaria entre el capital humano individual y el agregado de la forma:

$$h(v, t) = \chi \exp[\alpha t^*] \frac{H(v)}{L(v)} = \frac{\chi p H(t) \exp[\alpha t^* - \gamma(t - v)]}{n (\exp[-t^* p] - \exp[-j p])} \text{ si } t^* \leq t - v \tag{13}$$

donde γ denota la tasa de crecimiento del capital humano agregado. Obsérvese que el nivel de cualificación de un individuo ya incorporado al mercado laboral, además del capital humano agregado per capita existente en el instante de su nacimiento, depende de un factor de asimilación χ , de la longitud de su etapa de escolarización t^* y de su capacidad de aprendizaje α . En este sentido, podrían identificarse dos parámetros de naturaleza educativa que influyen en la cualificación de los trabajadores: χ , que configura, junto con el capital humano agregado per capita existente en el nacimiento, un nivel formativo primario, independiente de que el individuo se forme más o menos y sintomático por tanto de la eficacia del sistema educativo en sus tramos básicos; y α , determinante de la tasa de rentabilidad que en términos de mayor capital humano obtienen los individuos de la prolongación de su período de formación y asimilable a la eficacia del sistema educativo en sus niveles superiores.

Por otro lado, al no ser relevante a efectos productivos el capital humano de “estudiantes” y jubilados, ya que ambos colectivos no aportan sus conocimientos al sector productivo, el capital humano agregado se obtiene como la suma del que poseen los individuos que trabajan:

$$H(t) = \int_{t-j}^{t-t^*} h(v, t) n \exp[-p(t - v)] dv \tag{14}$$

Sustituyendo [13] en [14] y operando, se llega a una relación estable entre las tasas de crecimiento del capital humano individual y agregado, definida sobre la base de la siguiente ecuación implícita:

$$\gamma = -p + \chi \exp[\alpha t^*] \frac{p (\exp[j p - t^* \gamma] - \exp[t^* p - j \gamma])}{(\exp[j p] - \exp[t^* p])} \tag{15}$$

En esencia, el ritmo de crecimiento del capital humano agregado depende de dos hechos diferenciados. El primero, de su tasa de depreciación p , que es consecuencia de la pérdida de capital humano asociada

al fallecimiento de los individuos que integran la población activa. El segundo, de la renovación continua del contingente de trabajadores, de forma que en cada instante de tiempo se incorporan al mercado laboral individuos con un nivel de capital humano superior al que poseen los que en ese momento se jubilan. En consecuencia, existe una relación entre el ritmo de crecimiento económico y toda variable que afecte a la tasa de sustitución de trabajadores jóvenes por jubilados o al diferencial de sus niveles de capital humano, relación representada en la anterior ecuación. Más concretamente, se observa que la tasa de crecimiento del capital humano agregado depende de dos tipos de variables: las demográficas, que configuran la estructura poblacional de la economía (la expectativa de vida y la edad de jubilación), y las educativas, determinantes del nivel de capital humano con el que se incorporan al mercado de trabajo los individuos (el porcentaje de capital humano que inicialmente asimilan χ , la rentabilidad que obtienen del tiempo dedicado al estudio α y los años de escolarización t^*).

2.5. *Pensión por jubilado*

El sistema de Seguridad Social considerado es de reparto, es decir, las pensiones percibidas por los jubilados se financian con las cotizaciones realizadas por los trabajadores en ese mismo período. Así, si la pensión $b(t)$ es independiente de la edad del jubilado y de lo que haya cotizado en el pasado, tenemos que el total de prestaciones pagadas por la Seguridad Social en cada período es igual a:

$$\int_{-\infty}^{t-j} b(t)n \exp[-p(t-v)]dv = \frac{nb(t) \exp[-jp]}{p} \quad [16]$$

Por otro lado, suponiendo igualmente que la cotización salarial que abonan los trabajadores no depende de su edad, el ingreso que la Seguridad Social obtiene como consecuencia de las cotizaciones de los trabajadores adopta la expresión:

$$\int_{t-j}^{t-t^*} w\tau nh(v,t) \exp[-p(t-v)]dv = w\tau H(t) \quad [17]$$

A partir de [16] y [17] es inmediata la observación de que el equilibrio presupuestario de la Seguridad Social está vinculado a la prestación de la siguiente pensión por jubilado:

$$b(t) = \frac{p}{n} w\tau H(t) \exp[jp] \quad [18]$$

En función de la expresión anterior, se observa que el nivel de la pensión per capita depende positivamente del capital humano agregado, del tipo de cotización a la Seguridad Social, del salario, de la edad de jubilación, y negativamente de la esperanza de vida y del tamaño de las cohortes. Adicionalmente, se puede deducir que en el estado estacionario, dada la constancia del resto de variables, la pensión per capita crecerá al mismo ritmo que el capital humano agregado, de forma que los factores de crecimiento de éste último se convierten en los determinantes de la evolución de la pensión que percibe cada jubilado:

$$\gamma_b = \gamma \quad [19]$$

2.6. *Envejecimiento poblacional*

Al analizar la influencia que cualquier variable tiene sobre el ritmo de crecimiento económico, debe tenerse en cuenta que en ocasiones, además de la consecuencia directa ejercida sobre el ritmo al que se sustituyen trabajadores en el mercado laboral, puede existir otro efecto indirecto, transmitido por medio del cambio generado en el período de escolarización de los individuos. Por ello, antes de analizar los efectos del envejecimiento poblacional, la primera cuestión a considerar es el carácter ambiguo del signo de la relación existente entre la edad de los individuos cuando se incorporan al mercado laboral y la tasa de crecimiento económico, apreciable en la ecuación [15]. En este sentido, la ambigüedad reside en el hecho de que la prolongación por parte de los agentes de su período de escolarización trae consigo un efecto de calidad positivo sobre el ritmo de crecimiento económico, al incrementarse el capital humano individual que poseen cuando se incorporan al mercado de trabajo, y al mismo tiempo un efecto de cantidad negativo, al disminuir en el nuevo equilibrio el número de cohortes trabajadoras (que pasan a ser estudiantes como consecuencia del retraso de la incorporación al mercado laboral), que son las únicas poseedoras de capital humano a efectos productivos.

Una vez justificada la ambigüedad del resultado, el que un mayor período de escolarización aumente o disminuya la tasa de crecimiento económico dependerá fundamentalmente de la relación que exista entre la rentabilidad que en términos de ganancia de cualificación obtengan los individuos del mayor tiempo dedicado al estudio y el capital humano que pasa de ser productivo a improductivo como consecuencia de que la prolongación del tiempo de estudio comporta que un determinado número de cohortes pasan de ser trabajadoras a estudiantes. En este

sentido, para un determinado capital humano individual esta relación puede identificarse por medio del ratio α/χ , el cual puede interpretarse como una medida de la eficacia relativa de la educación superior con relación a la formación básica. A este respecto, cuanto menor sea este ratio, más probable será que el retraso de la incorporación al mercado de trabajo reduzca la tasa de crecimiento económico, ya que el capital humano de los trabajadores será resultado principalmente de una adecuada formación de partida más que de las ganancias de cualificación obtenidas de su superior formación, por lo que la prolongación del período de escolarización traerá consigo más costes que beneficios.

Con relación a los efectos generados por una mayor esperanza de vida sobre el crecimiento económico, nuevamente se observa que el signo del efecto es ambiguo. Así, por un lado, la prolongación del horizonte vital esperado reduce el ritmo al que disminuye el tamaño de cada cohorte debido a la muerte de los individuos que la componen, ampliándose el contingente de trabajadores e implicando una reducción de la tasa de depreciación del capital humano agregado. Pero por otra parte, al esperar vivir durante más tiempo, los individuos alargan su período de escolarización, lo cual genera un efecto ambiguo sobre el ritmo de crecimiento económico, cuya justificación se ha puesto de manifiesto en los párrafos precedentes.

La ambigüedad de la relación entre expectativa de vida y crecimiento económico está en sintonía con el resultado obtenido por de la Croix y Licandro (1999), quienes observan un efecto positivo de la mayor esperanza de vida sobre el crecimiento económico cuando la expectativa es baja, efecto que puede tornarse negativo cuando la esperanza de vida es alta. Sin embargo, aunque la naturaleza del resultado es similar, la justificación de la ambigüedad es diferente y, en este sentido, si bien encontramos que la magnitud del efecto se ve influida ligeramente por la expectativa de vida que inicialmente tengan los individuos, la ambigüedad del signo de la relación depende de la edad de jubilación, de la edad de incorporación de los individuos al mercado laboral y, fundamentalmente, de que en el capital humano individual predomine su naturaleza básica o la adquirida después en la etapa de escolarización.

3. Calibración y simulación

En este apartado se realiza una calibración de los parámetros más relevantes del modelo, utilizando como referencia los países miembros de la Unión Europea (excepto Luxemburgo), en un intento de ratificar

cuantitativamente las intuiciones cualitativas obtenidas con anterioridad. El contexto temporal será 2000 - 2050, aprovechando los datos proporcionados por el informe de la División de Población de las Naciones Unidas emitido en el año 2001.

A este respecto, hay que ser conscientes del limitado alcance de este ejercicio de simulación, que compara los estados estacionarios de una misma economía para parámetros diferentes, pero constantes, obviando la dinámica de ajuste⁵. Esta restricción implica suponer que el envejecimiento poblacional se produce de una vez y que sus efectos son absorbidos por las economías en el horizonte temporal descrito, cuando en realidad los países necesitan más de cinco décadas para asimilar totalmente las consecuencias de una determinada perturbación demográfica. No obstante, a pesar de esta limitación, el ejercicio ilustra con claridad los efectos que sobre el crecimiento económico genera el proceso de envejecimiento poblacional que desde hace un tiempo experimentan los países europeos, y de ahí su interés.

3.1. Calibración

En el escenario de referencia, la edad de jubilación j considerada es 65 años y el tipo de interés real r el 2%, suponiéndose ambas magnitudes comunes a todas las economías. En cuanto a la edad de incorporación al mercado laboral t^* , se han elegido edades que generen resultados razonables, a la vez que se ha intentado discriminar favorablemente a los países cuyos habitantes, objetivamente hablando, dediquen un mayor período de tiempo a la formación, lo que se ha aproximado por la posesión de un mayor nivel promedio de estudios terminados, elaborando a tal efecto un índice de ponderación relativa $idpr$ ⁶. A partir del mismo y de las edades de incorporación al mercado laboral elegidas para el país más formado (25 años para Alemania) y para el

⁵De la Croix y Licandro (1999) y Boucekkine, de la Croix y Licandro (2000) van más allá de la simple comparación de estados estacionarios, estudiando adicionalmente la estabilidad del equilibrio y la dinámica de transición.

⁶El índice de ponderación relativa $idpr$ se obtiene como el cociente del número de años de formación reglada per capita de la población de cada país, con relación al promedio observado en el resto de países. A partir de la distribución de la población trabajadora de 25 a 64 años por nivel de estudios alcanzados (Bajos, Medios, Superiores) que existe en cada país, utilizando datos de la OCDE (2000) y siguiendo el procedimiento descrito por Serrano (1996), partiendo de la edad de escolarización obligatoria, 6 años, y otorgando 3,5 años de estudio a los poseedores de estudios bajos, 11 a los de estudios medios, y 17 a los de estudios superiores, se obtiene una aproximación al número de años de formación reglada per capita de la población de cada país, a partir del cual se construye el índice mencionado.

menos formado (16 años para Portugal), se obtiene el t^* de partida de cada país, impuesto exógenamente al modelo, valor que junto con la edad de jubilación, la probabilidad de muerte y el tipo de interés, configura endógenamente el valor de α , parámetro no observable y representativo de la rentabilidad que en términos de mayor capital humano obtienen los individuos del tiempo que dedican al estudio.

Teniendo en cuenta las restricciones del modelo y efectuando abstracción de otros considerandos de índole productivo, institucional, geográfico, etc., en un contexto de igual edad de jubilación, idéntico tipo de interés y similares esperanzas de vida, el que portugueses, españoles e italianos sean, por este orden, los poseedores de los menores niveles promedio de estudios terminados se debería explicar por la menor rentabilidad que en términos de acumulación de capital humano individual obtienen del período de escolarización (que en este trabajo se representa por poseer los valores de α más pequeños), lo que haría que se incorporasen al mercado laboral a edades más tempranas que las de sus vecinos europeos. Como es lógico, a mayor nivel de estudios promedio de los individuos del país, mayor valor de α calibrado.

CUADRO 1
Parámetros económicos

	Bajos	Med.	Super.	idpr	t^*	/	\Im	∂	/ ∂
Alemania	12%	61%	27%	1,174	25,00	0,0449	1,45	0,602	0,075
Austria	21%	66%	13%	1,049	23,09	0,0439	1,72	0,735	0,060
Bélgica	32%	35%	33%	1,076	23,50	0,0440	1,59	0,685	0,064
Dinamarca	18%	54%	28%	1,149	24,60	0,0448	2,08	0,789	0,057
España	59%	16%	25%	0,811	19,46	0,0422	2,10	0,983	0,043
Finlandia	26%	41%	33%	1,122	24,19	0,0445	1,75	0,707	0,063
Francia	33%	44%	23%	0,998	22,31	0,0434	1,46	0,687	0,063
Grecia	48%	32%	20%	0,875	20,43	0,0426	1,09	0,645	0,066
Holanda	28%	44%	28%	1,065	23,33	0,0440	1,79	0,747	0,059
Irlanda	41%	32%	26%	0,953	21,63	0,0434	3,76	1,667	0,026
Italia	47%	42%	11%	0,845	19,97	0,0424	1,58	0,794	0,053
Portugal	76%	12%	12%	0,584	16,00	0,0413	2,88	1,424	0,029
Reino Unido	14%	60%	26%	1,159	24,77	0,0447	2,03	0,771	0,058
Suecia	21%	49%	30%	1,141	24,50	0,0444	0,89	0,491	0,090

Fuente: OCDE (2000), Banco Mundial (2001) y elaboración propia.

Leyenda:

Índice de ponderación relativa: *idpr*.

Edad de incorporación al mercado de trabajo: t^* (años).

Capacidad de aprendizaje de los individuos: /.

Tasa de crecimiento del capital humano agregado: \Im (en porcentaje).

Grado de asimilación por las nuevas cohortes del capital humano por trabajador: ∂ .

Por otro lado, a partir de la tasa de crecimiento económico per capita estacionaria de cada país (de la que se ha tomado su media de los últimos veinte años), se ha obtenido el grado de capital humano por trabajador que asimilan en promedio las nuevas generaciones χ , interpretable como la eficacia del sistema educativo primario, parámetro no observable que se obtiene de forma endógena para cuadrar el modelo a partir de la ecuación fundamental de crecimiento [15]. A este respecto, Irlanda y Portugal, con un 3,76 % y un 2,88 %, respectivamente, son los países que durante las dos últimas décadas han experimentado el mayor ritmo de crecimiento anual promedio de la renta per capita, seguido por España (2,10 %), Dinamarca (2,08 %) y Reino Unido (2,03 %). En el otro extremo, Grecia con un 1,09 %, y especialmente Suecia con un escaso 0,89 %, son los países que menos han crecido en este período. Estos datos de crecimiento implican que son Irlanda, Portugal y España los países con los mayores valores de χ calibrados, mientras que Suecia es el que lo tiene más pequeño, tal y como se observa en el Cuadro 1.

CUADRO 2
Parámetros demográficos

	2000		2050	
	<i>ev</i>	<i>p</i>	<i>ev</i>	<i>p</i>
Alemania	78,2	0,0128	83,4	0,0120
Austria	78,5	0,0127	83,6	0,0120
Bélgica	78,8	0,0127	83,8	0,0119
Dinamarca	76,6	0,0130	81,4	0,0123
España	78,8	0,0127	82,6	0,0121
Finlandia	78,0	0,0128	83,0	0,0120
Francia	79,0	0,0126	84,0	0,0119
Grecia	78,5	0,0127	82,4	0,0121
Holanda	78,3	0,0128	82,2	0,0122
Irlanda	77,0	0,0130	81,4	0,0123
Italia	78,7	0,0127	82,5	0,0121
Portugal	76,2	0,0131	81,0	0,0123
Reino Unido	78,2	0,0128	83,0	0,0120
Suecia	80,1	0,0124	84,6	0,0118

Fuente: ONU (2001) y elaboración propia.

Leyenda:

Esperanza de vida al nacer: *ev*.

Probabilidad de muerte: *p*.

En cuanto a la parametrización demográfica, resumida en el Cuadro 2, la única variable relevante a efectos de la simulación es la probabilidad de muerte por unidad de tiempo *p*, que se obtiene a partir de la esperanza de vida al nacer *ev* de los habitantes de cada país. Según los

datos de Naciones Unidas, en 2000 el país con la mayor esperanza de vida entre sus habitantes era Suecia, seguido de Francia y España, por lo que les corresponde la menor probabilidad de muerte instantánea; en 2050 se estima que los suecos serán quienes disfruten nuevamente de una mayor expectativa de vida, aunque serán los alemanes quienes experimenten la mayor prolongación de su horizonte vital esperado (un 6,65 %), seguidos por los austriacos (6,50 %) y finlandeses (6,41 %), mientras que entre italianos y españoles aumentará un escaso 4,82 %.

3.2. Simulación

El Cuadro 3 muestra el resultado de simular para cada país el aumento de la expectativa de vida de sus habitantes, presentando los efectos que se generarán sobre la edad de incorporación al mercado de trabajo t^* , así como sobre el ritmo de crecimiento económico γ . A este respecto, y como se había anticipado en la parte teórica, a la vista de los resultados obtenidos se aprecia la existencia de una cierta ambigüedad en la relación entre esperanza de vida y crecimiento económico, dada la disparidad cuantitativa en la respuesta de las tasas de crecimiento ante variaciones más o menos similares en el horizonte vital esperado de los habitantes de cada país.

CUADRO 3
Efectos del envejecimiento

	2000			2050			2050/2000		
	ev	t^*	\Im	ev	t^*	\Im	$\Delta ev\%$	$\Delta t^*\%$	$\Delta \Im\%$
Alemania	78,2	25,00	1,45	83,4	26,00	1,53	6,65	4,00	5,52
Austria	78,5	23,09	1,72	83,6	24,18	1,80	6,50	4,72	4,65
Bélgica	78,8	23,50	1,59	83,8	24,54	1,67	6,35	4,43	5,03
Dinamarca	76,6	24,60	2,08	81,4	25,59	2,15	6,27	4,02	3,37
España	78,8	19,46	2,10	82,6	20,48	2,17	4,82	5,24	3,33
Finlandia	78,0	24,19	1,75	83,0	25,21	1,83	6,41	4,22	4,57
Francia	79,0	22,31	1,46	84,0	23,42	1,55	6,33	4,98	6,16
Grecia	78,5	20,43	1,09	82,4	21,43	1,18	4,97	4,89	8,26
Holanda	78,3	23,33	1,79	82,2	24,18	1,85	4,98	3,64	3,35
Irlanda	77,0	21,63	3,76	81,4	22,72	3,80	5,71	5,04	1,06
Italia	78,7	19,97	1,58	82,5	20,97	1,66	4,83	5,01	5,06
Portugal	76,2	16,00	2,88	81,0	17,64	2,97	6,30	10,25	3,13
Reino Unido	78,2	24,77	2,03	83,0	25,71	2,10	6,14	3,80	3,45
Suecia	80,1	24,50	0,89	84,6	25,36	0,97	5,62	3,51	8,99

Fuente: Elaboración propia.

Comenzando por la cuantificación del efecto que el envejecimiento poblacional genera sobre el período de escolarización de los individuos, se confirma que éste se prolonga en todos los casos y que por regla general su incremento porcentual no depende tanto de la magnitud del aumento en la esperanza de vida como de otras cuestiones relacionadas con la formación. Sirva como muestra el que Alemania, aunque es el país cuyos habitantes experimentan la mayor prolongación de su horizonte vital (de 78,2 a 83,4 años, un incremento del 6,65%), es una de las economías donde el período de escolarización aumenta menos, un año, cuantía inferior tanto en términos absolutos como porcentuales a la observada en España, que es donde menos aumenta la expectativa de vida.

Por otro lado, y ésta es la cuestión central de la simulación, tampoco se aprecia una regularidad en la respuesta de las tasas de crecimiento económico ante el envejecimiento demográfico. Sirva el ejemplo de Irlanda y Francia, países que con aumentos muy semejantes en la esperanza de vida de sus habitantes, y lo que es más relevante, con incrementos casi idénticos —tanto en términos absolutos como relativos— en su período de escolarización (de 1,1 años, lo que supone un aumento del 5%), experimentan consecuencias totalmente dispares sobre sus ritmos de crecimiento económico: en Irlanda aumenta en 0,039 puntos porcentuales (lo que supone un exiguo 1%), mientras que en Francia el incremento es de 0,090 puntos (lo que implica un incremento superior al 6%). La explicación a la disparidad de los resultados es doble. Por un lado, el capital humano agregado que se pierde como consecuencia del retraso en la incorporación de los individuos al mercado laboral es mayor en Irlanda que en Francia, lo que en nuestro modelo se justifica por ser el valor de χ en Irlanda 2,4 veces superior al de Francia (ya que para períodos de formación y esperanzas de vida semejantes, cuanto mayor sea χ , mayor será el capital humano de los individuos que componen las cohortes productivas). Por otro lado, el aumento en el bagaje formativo de los irlandeses como consecuencia del mayor período de escolarización es ligeramente inferior que el de los franceses, dado que la rentabilidad que en términos de mayor capital humano individual obtienen por dedicar más tiempo a la formación (lo que representamos como α) es menor en Irlanda que en Francia.

En otras palabras, en Irlanda, el aumento de la tasa de crecimiento económico debido a que los individuos se incorporan al mercado de trabajo con un mayor nivel de capital humano apenas sí compensa el efecto

negativo derivado de que al prolongar el período de escolarización se reduce el número de cohortes trabajadoras, las únicas poseedoras de capital humano a efectos productivos. Por contra, en Francia el efecto de la mayor cualificación es netamente superior al generado por la desaparición de cohortes productivas, al igual que acontece en Suecia, Grecia y Alemania, que son las economías con mayores aumentos en sus tasas de crecimiento económico y, junto con Francia, los países con un mayor ratio α/χ , el cual habíamos interpretado en el apartado 2.6 como una medida de la eficacia relativa de la educación superior con relación a la formación básica.

CUADRO 4
Efectos del envejecimiento en España. Diferentes escenarios

<i>j</i>	<i>r</i>	<i>/∂</i>	2000			2050			2050/2000		
			<i>ev</i>	<i>t*</i>	\Im	<i>ev</i>	<i>t*</i>	\Im	$\Theta_{ev}\%$	$\Theta_{t^*}\%$	$\Theta_{\Im}\%$
60	2,0	0,026	78,8	19,46	4,000	82,6	20,22	4,029	4,82	3,91	0,72
60	1,5	0,022	78,8	19,46	4,000	82,6	20,16	4,019	4,82	3,60	0,48
60	1,0	0,019	78,8	19,46	4,000	82,6	20,11	4,010	4,82	3,34	0,25
60	0,5	0,016	78,8	19,46	4,000	82,6	20,06	4,003	4,82	3,08	0,08
65	2,0	0,022	78,8	19,46	4,000	82,6	20,48	4,029	4,82	5,24	0,72
65	1,5	0,019	78,8	19,46	4,000	82,6	20,40	4,016	4,82	4,83	0,40
65	1,0	0,016	78,8	19,46	4,000	82,6	20,32	4,005	4,82	4,42	0,12
65	0,5	0,014	78,8	19,46	4,000	82,6	20,25	3,996	4,82	4,06	-0,10
70	2,0	0,019	78,8	19,46	4,000	82,6	20,80	4,028	4,82	6,89	0,70
70	1,5	0,016	78,8	19,46	4,000	82,6	20,67	4,012	4,82	6,22	0,30
70	1,0	0,014	78,8	19,46	4,000	82,6	20,56	3,999	4,82	5,65	-0,02
70	0,5	0,012	78,8	19,46	4,000	82,6	20,46	3,989	4,82	5,14	-0,28

Fuente: Elaboración propia.

A este respecto, el Cuadro 4 muestra los resultados de simular para el caso español tres diferentes escenarios caracterizados por la existencia de distintas edades de jubilación (60, 65 y 70), donde en cada caso se contempla la existencia de cuatro tipos de interés reales (2,0%, 1,5%, 1,0% y 0,5%). Suponiendo como tasa de crecimiento económico de partida el 4% y el período de escolarización ya comentado de 19,46 años, en los tres escenarios considerados se confirma que, cuanto menor es la relación α/χ , menor es el efecto positivo que el envejecimiento ejerce sobre la tasa de crecimiento económico, llegando incluso a disminuir a partir de un cierto umbral. Ello es debido a que valores relativamente pequeños de este ratio implican que el nivel de capital humano que poseen los trabajadores es consecuencia principalmente de una adecuada formación de partida más que de las ganancias de cualificación obtenidas de su superior formación, por lo que la prolongación

del período de escolarización trae consigo más costes que beneficios, reduciéndose la tasa de crecimiento económico.

4. Conclusiones y ampliaciones

Este trabajo desarrolla un modelo de crecimiento endógeno y generaciones solapadas en el que la acumulación del capital humano induce el crecimiento económico y en donde un sistema de Seguridad Social basado en el reparto garantiza la prestación de pensiones por jubilación. El principal resultado obtenido, restringiendo el estudio al análisis del estado estacionario y observando previamente la coincidencia en los ritmos de crecimiento del capital humano agregado y de la pensión por jubilado, es la existencia de una relación de signo incierto entre envejecimiento y tasa de crecimiento económico.

Su explicación reside en la ambigüedad de la relación entre la esperanza de vida y la tasa de acumulación del capital humano agregado. Así, una mayor expectativa de vida reduce el ritmo al que disminuye el tamaño de cada cohorte debido a la muerte de los individuos que la componen, reduciendo la tasa de depreciación del capital humano agregado. Pero, por otra parte, los individuos alargan su período de escolarización, incorporándose al mercado de trabajo con un mayor nivel de capital humano (efecto positivo), pero a una edad mayor, lo que reduce el número de cohortes trabajadoras (efecto negativo). La magnitud del efecto negativo será tanto más importante cuanto mayor sea el grado de formación de las personas que integren las cohortes que pasan de ser “trabajadoras” a “estudiantes” y cuanto menor sea la rentabilidad que en términos de mayor capital humano obtienen los individuos como resultado de prolongar el tiempo de formación.

Por último, el presente trabajo se limita a comparar estados estacionarios, lo que reduce el escenario de análisis al largo plazo. La ampliación del mismo -en curso- incorpora el estudio de la dinámica de transición, lo que permitirá determinar los efectos de corto plazo.

Apéndice A1: El comportamiento optimizador de los individuos

Las ecuaciones [6], [7], [8] y [9] definen el comportamiento de los individuos, el cual tiene distintos considerandos antes y después de jubilarse. Si analizamos el escenario de jubilación ($t \geq v + j$) el hamiltoniano que

resume el comportamiento maximizador de los individuos es el siguiente:

$$\mathbb{H} = \exp[-(p+r)(t-v)] \ln c(v, t) + \lambda(v, t)[(r+p)a(v, t) + b(v, t) - c(v, t)]$$

donde $\lambda(v, t)$ es la variable de coestado asociada a la variable de estado $a(v, t)$, y donde las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial c} &= \frac{\exp[-(p+r)(t-v)]}{c(v, t)} - \lambda(v, t) = 0 \\ \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial a} &= \lambda(v, t)(r+p) = -\dot{\lambda}(v, t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(v, t)a(v, t) &= 0 \end{aligned}$$

Despejando de la primera ecuación la expresión de $\lambda(v, t)$ y sustituyendo en la segunda, se obtiene:

$$\frac{\dot{c}(v, t)}{c(v, t)} = 0$$

A partir de

$$\dot{a}(v, t) = (r+p)a(v, t) + b(t) - c(v, t)$$

despejando $c(v, t)$ e integrando, se llega a:

$$\int_{v+j}^{\infty} c(v, t) \exp[-(p+r)(t-v-j)] dt = d(v, v+j) + a(v, v+j)$$

donde $d(v, v+j)$ representa el valor esperado de las pensiones futuras del individuo, valoradas al momento de la jubilación:

$$d(v, v+j) = \int_{v+j}^{\infty} b(t) \exp[-(p+r)(t-v-j)] dt$$

Teniendo en cuenta la constancia del consumo, se obtiene su valor:

$$c(v, t) = (r+p)[d(v, v+j) + a(v, v+j)]$$

Con lo que la utilidad que obtiene el individuo durante su vida de jubilado es:

$$\begin{aligned} U[a(v, v+j)] &= \int_{v+j}^{\infty} \exp[-(p+r)(t-v-j)] \ln[(r+p)[d(v, v+j) + \\ &\quad + a(v, v+j)]] dt \\ &= \frac{\ln [(r+p)[d(v, v+j) + a(v, v+j)]]}{r+p} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta este resultado, el problema de control óptimo que resume el comportamiento maximizador de los individuos antes de jubilarse ($t < v + j$) puede formularse como la maximización de la siguiente función objetivo:

$$\max_{\substack{c(v,t) \\ u(v,t)}} \int_v^{v+j} \ln c(v,t) \exp[-(p+r)(t-v)] dt + U[a(v, v+j)] \exp[-j(p+r)]$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \dot{a}(v,t) &= (r+p)a(v,t) + w(1-\tau)(1-u(v,t))h(v,t) - c(v,t) \\ \dot{h}(v,t) &= \alpha u(v,t) h(v,t) \\ 0 &\leq u(v,t) \leq 1 \end{aligned}$$

y dadas $a(v, v)$ y $h(v, v)$. El Lagrangiano asociado a este problema de optimización es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \ln c(v,t) \exp[-(p+r)(t-v)] \\ &+ \lambda(v,t) [(r+p)a(v,t) + w(1-\tau)(1-u(v,t))h(v,t) - c(v,t)] \\ &+ \eta(v,t) [\alpha u(v,t) h(v,t)] + \beta_1(v,t)u(v,t) + \beta_2(v,t)(1-u(v,t)) \end{aligned}$$

donde como antes $\lambda(v, t)$ es la variable de coestado asociada a la variable de estado $a(v, t)$, y donde $\eta(v, t)$ es la variable de coestado asociada a la variable de estado $h(v, t)$, y siendo $\beta_1(v, t)$ y $\beta_2(v, t)$ los multiplicadores de Lagrange asociados a la acotación de la variable de control $u(v, t)$. Aplicando las técnicas habituales de resolución se obtienen como condiciones de primer orden las siguientes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = \frac{\exp[-(p+r)(t-v)]}{c(v,t)} - \lambda(v,t) = 0 \tag{A1.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} &= -\lambda(v,t)w(1-\tau)h(v,t) + \eta(v,t)\alpha h(v,t) + \\ &+ \beta_1(v,t) - \beta_2(v,t) = 0 \end{aligned} \tag{A1.2}$$

$$0 = \beta_1(v,t)u(v,t) \quad , \quad \beta_1(v,t) \geq 0 \tag{A1.3}$$

$$0 = \beta_2(v,t)(1-u(v,t)) \quad , \quad \beta_2(v,t) \geq 0 \tag{A1.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} &= \lambda(v,t)w(1-\tau)(1-u(v,t)) + \eta(v,t)\alpha u(v,t) = \\ &= -\dot{\eta}(v,t) \end{aligned} \tag{A1.5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = \lambda(v,t)(r+p) = -\dot{\lambda}(v,t) \tag{A1.6}$$

$$\begin{aligned}\lambda(v, v+j) &= \frac{\partial U[a(v, v+j)] \exp[-j(p+r)]}{\partial a(v, v+j)} = \\ &= \frac{\exp[-j(p+r)]}{(r+p)[d(v, v+j) + a(v, v+j)]} \quad [A1.7]\end{aligned}$$

$$\eta(v, v+j) = 0 \quad [A1.8]$$

Integrando la ecuación diferencial [A1.6], y utilizando la condición final [A1.7], se obtiene:

$$\lambda(v, t) = \frac{1}{\exp[(p+r)(t-v)](r+p)[d(v, v+j) + a(v, v+j)]} \quad [A1.9]$$

Despejando $\lambda(v, t)$ en [A1.1] y sustituyendo en [A1.6] se obtiene:

$$\frac{\dot{c}(v, t)}{c(v, t)} = 0 \quad [A1.10]$$

De [A1.9] y [A1.10] se llega a:

$$c(v, t) = (r+p)(d(v, v+j) + a(v, v+j)) \quad [A1.11]$$

Por otro lado, de [A1.2], [A1.3] y [A1.4] se deduce que:

$$\begin{aligned}\text{Si } \lambda(v, t)w(1-\tau) &< \eta(v, t)\alpha && \rightarrow u^* = 1 \\ \text{Si } \lambda(v, t)w(1-\tau) &> \eta(v, t)\alpha && \rightarrow u^* = 0 \\ \text{Si } \lambda(v, t)w(1-\tau) &= \eta(v, t)\alpha && \rightarrow \text{no depende de } u\end{aligned} \quad [A1.12]$$

donde $\eta(v, t)\alpha$ representa el valor marginal de producir una unidad de capital humano, y $\lambda(v, t)w(1-\tau)$ el valor marginal de emplear ese capital humano en la producción de capital físico. A este respecto, como a partir de [A1.7] y [A1.9] se deduce que en el momento $v+j$ sucede que $\lambda(v, v+j)w(1-\tau) > \eta(v, v+j)\alpha = 0$, en base a [A1.12] se deriva que en ese instante $u^* = 0$.

Si por otro lado definimos $v+t^*$ como el mayor instante para el que $\lambda(v, t)w(1-\tau) \leq \eta(v, t)\alpha$, es decir, el momento a partir del cual el individuo trabaja, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned}t \in (v+t^*, v+j] &\rightarrow u^* = 0 \\ t \in (v, v+t^*] &\rightarrow u^* = 1\end{aligned}$$

En consecuencia, a partir de [A1.5], cuando $t \in (v+t^*, v+j]$:

$$\lambda(v, t)w(1-\tau) = -\dot{\eta}(v, t) \quad [A1.13]$$

Integrando en [A1.13], y utilizando [A1.9] y [A1.8], se obtiene:

$$\eta(v, t) = \frac{w(1 - \tau) [\exp[-(t - v)(p + r)] - \exp[-j(p + r)]]}{(r + p)^2 [d(v, v + j) + a(v, v + j)]} \quad [\text{A1.14}]$$

Por [A1.12], como en el instante $v + t^*$ sucede que el valor marginal de producir una unidad adicional de capital humano $\eta(v, v + t^*)\alpha$ coincide con el valor marginal de utilizar ese capital humano en la producción de capital físico $\lambda(v, v + t^*)w(1 - \tau)$, operando en [A1.9] y [A1.14] se obtiene:

$$r + p = \alpha(1 - \exp[-(r + p)(j - t^*)]) \quad [\text{A1.15}]$$

Esta ecuación expresaría que en el instante $v + t^*$ el valor marginal de la riqueza invertida en capital físico (a la izquierda) coincide con el valor marginal de la riqueza invertida en capital humano (a la derecha). Finalmente, operando en [A1.15] se obtiene la expresión de la edad a la que los individuos se incorporan al mercado laboral t^* :

$$t^* = j + \frac{\log[1 - \frac{r+p}{\alpha}]}{r + p} \quad [\text{A1.16}]$$

Referencias

- Barro, R. y X. Sala-i-Martin (1995), *Economic Growth*, McGraw-Hill, Madrid.
- Ben-Porath, Y. (1967): "The production of human capital and the life cycle of earnings", *Journal of Political Economy* 75, pp. 352-365.
- Blanchard, O. (1985): "Debts, deficits and finite horizons", *Journal of Political Economy* 93, pp. 223-247.
- Boucekkine, R., De la Croix, D. y O. Licandro (2000): "Vintage human capital, demographic trends and endogenous growth", DT 2000-02 FEDEA.
- Bovenberg, L. y C. van Ewijk (1997): "Progressive taxes, equity, and human capital accumulation in an endogenous growth model with overlapping generations", *Journal of Public Economics* 64, pp. 153-179.
- Breyer, F. y M. Straub (1993): "Welfare effects of unfounded pension systems when labor supply is endogenous", *Journal of Public Economics* 50, pp. 77-91.
- Brunner, J. K. (1996): "Transition from a pay-as-you-go to a fully funded pension system: the case of differing individuals and intragenerational fairness", *Journal of Public Economics* 60, pp. 131-146.
- Caballé, J. (1995): "Endogenous growth, human capital, and bequests in a life-cycle model", *Oxford Economic Papers* 47, pp. 156-181.
- Casarico, A. (1998): "Pension reform and economic performance under imperfect capital markets", *Economic Journal* 108, pp. 344-362.
- De la Croix, D. y O. Licandro (1999): "Life expectancy and endogenous growth", *Economics Letters* 65, pp. 255-263.
- Eguía, B. (1997): "Seguridad Social y estructura demográfica en un modelo de ciclo vital con edad de retiro endógena", *Revista de Economía Aplicada* 13, pp. 5-38.
- Ehrlich, I. y F. Lui (1997): "The problem of population and growth: a review of the literature from Malthus to contemporary models of endogenous population and endogenous growth", *Journal of Economic Dynamics and Control* 21, pp. 205-242.
- Fernández Cordon, F. (1998): "Proyección de la población española", DT 98-11 FEDEA.
- Fuster, L. (1997): "Redistribución intergeneracional y crecimiento económico", *Revista Española de Economía* 14, pp. 251-267.
- Herce, J. A. (1997): "La reforma de las pensiones en España: aspectos analíticos y aplicados", *Moneda y Crédito* 204, pp. 105-143.
- Hirte, G. y R. Weber (1997): "Pareto improving transition from a pay-as-you-go to a fully funded system: is it politically feasible?", *Finanz Archiv* 54, pp. 303-330.
- Jackson, W. A. (1989): "Utilitarian pension and retirement policies under population ageing", *Journal of Population Economics* 1, pp. 73-78.
- López García, M. A. (1988): "Seguridad Social y crecimiento demográfico en un modelo de ciclo vital", *Investigaciones Económicas* 12, pp. 455-471.

- Lucas, R.E. (1988): "On the mechanics of economic development", *Journal of Monetary Economics* 22, pp. 3-42.
- Meijdam, L. y H. Verbon (1996): "Aging and political decision making on public pensions", *Journal of Population Economics* 9, pp. 34-67.
- Meijdam, L. y H. Verbon (1997): "Aging and public pensions in an overlapping-generations model", *Oxford Economic Papers* 49, pp. 29-42.
- Montero, M. (2000): "Estructura demográfica y sistemas de pensiones. Un análisis de equilibrio general aplicado a la economía española", *Investigaciones Económicas* 24, pp. 297-327.
- Nerlove, M., A. Razin and E. Sadka (1986): "Some welfare theoretic implications of endogenous fertility", *International Economic Review* 27, pp. 3-31.
- OCDE (2000), *Education at a Glance*, OCDE.
- ONU (2001), *World Population Estimates and Projections, 2000*, ONU, www.undp.org/popin.
- Serrano, L. (1996): "Indicadores de capital humano y productividad", *Revista de Economía Aplicada* 10, pp. 177-190.
- Sheshinski, E. (1968): "On the individual's life time allocation between education and work", *Metroeconomica* 20, pp. 42-49.
- Spence, M. (1973): "Job market signalling", *Quarterly Journal of Economics* 87, pp. 355-374.
- Wiedmer, T. (1996): "Growth and Social Security", *Journal of Institutional and Theoretical Economics* 152, pp. 531-539.
- Zhang, J. (1995): "Social security and endogenous growth", *Journal of Public Economics* 58, pp. 185-213.
- Zhang, J. y J. Zhang (1998): "Social security, intergenerational transfers, and endogenous growth", *Canadian Journal of Economics* 31, pp. 1225-1241.

Abstract

Using a model with endogenous growth and overlapping generations as its base, this paper analyzes the relationship between the ageing of the population and the rate of economic growth in an open economy. The results suggest that population ageing can decrease the economic growth rate in the long run.

Keywords: Social Security, human capital, endogenous growth, overlapping generations, life expectancy.

*Recepción del original, septiembre de 2001
Versión final, julio de 2002*