Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XVI, n.º 3 (1992), pp. 393-400.

SOBRE LA DISTRIBUCION JUSTA DE UN PASTEL EN PRESENCIA DE EXTERNALIDADES*

Carmen HERRERO
y
Antonio VILLAR
Universidad de Alicante
Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas

Este trabajo se refiere a un problema de distribución puro, consistente en buscar fórmulas «justas» de repartir una cantidad dada de un bien perfectamente divisible. Planteamos un modelo teórico en el que se analiza la existencia de distribuciones eficientes y libres de envidia en un contexto caracterizado por la presencia de externalidades. El resultado principal consiste en identificar una familia de funciones de utilidad para las cuales la única distribución justa es la división igualitaria. Ello supone que, en el contexto indicado, no es necesaria ninguna información sobre las preferencias para obtener asignaciones justas.

1. Introducción

El objeto del presente trabajo es la discusión de un problema distributivo en el que un planificador debe decidir cómo asignar una cantidad dada de un cierto bien perfectamente divisible (por ejemplo dinero), entre un conjunto de agentes (individuos, familias, grupos sociales, etc.). Las características más destacables del problema que nos ocupa son las siguientes:

1) La cantidad total del bien a repartir está dada *a priori*, de modo que se trata de un problema de distribución puro.

2) El planificador pretende conseguir una asignación que pueda considerarse «equitativa», desde el punto de vista de la distribución del bienestar.

3) El bienestar de cada agente puede depender de las cantidades de bien asignadas no sólo a él, sino también a algunos (o todos) de los restantes individuos (presencia de externalidades).

Existen diversas formas de enfrentarse a un problema de distribución puro, de tal forma que la asignación resultante pueda considerarse «satisfactoria» desde un punto de vista ético. La primera de ellas consiste en distribuir el

* Los autores desean agradecer los comentarios y sugerencias de dos evaluadores anónimos, así como la ayuda financiera prestada por la Generalitat Valenciana y la D.G.I.C.Y.T. (proyecto PS89-0066).

bien en cuestión en la forma indicada por la solución de un problema de maximización de una función de bienestar social [véase Sen (1986)]. Esta aproximación está estrechamente vinculada a la literatura normativa sobre desigualdad. Otra posibilidad consiste en plantear la distribución del bien como el resultado de un juego cooperativo entre los participantes, especialmente utilizando la teoría de los juegos de negociación [véase, por ejemplo, Moulin (1988, Capíts. 3-5)]. Una tercera alternativa consiste en encontrar una distribución que satisfaga determinadas propiedades preestablecidas de «justicia distributiva», en la tradición de Foley, Kolm, Varian, etc. [véase Thomson & Varian (1985)].

El enfoque utilizado en este trabajo se encuadra en el tercer tipo de aproximación mencionado. Deseamos que nuestra solución posea dos propiedades: ser *eficiente* (es decir, que deseamos asignar los recursos sin desaprovechar oportunidades), y *libre de envidia* (es decir, deseamos efectuar un reparto del bien de modo que los diferentes individuos estén conformes con lo que cada uno de ellos recibe, sin desear cambiar su asignación con la de algún otro individuo). Una asignación que verifique ambas propiedades se denominará *justa.*

En el contexto que nos ocupa (la distribución de un único bien perfectamente divisible), es fácil obtener una asignación libre de envidia: basta con dar a todos los individuos la misma cantidad de bien. Si cada uno de los agentes sólo se preocupa de la cantidad de bien que él (ella) percibe, de tal forma que prefiere siempre mayores a menores cantidades del bien en cuestión (preferencias crecientes y sin externalidades), entonces toda asignación que agote la cantidad total a repartir será eficiente. En consecuencia, si designamos por M la cantidad total de bien a repartir entre n agentes, y damos a cada uno una cantidad igual a M/n tendremos que la asignación resultante es eficiente y verifica el principio de ausencia de envidia.

Este resultado deja de verificarse en general en presencia de externalidades. En tal caso, ya no es necesariamente cierto que toda asignación que reparta la totalidad del bien sea eficiente. En particular, la distribución igualitaria puede no ser eficiente. Para comprobarlo consideremos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1: Supongamos que el problema consiste en distribuir una unidad de dinero entre tres individuos, cuyas funciones de utilidad vienen dadas por:

$$u_1(x) = x_1; \quad u_2(x) = x_2 - 2x_3; \quad u_3(x) = x_3 - 2x_2$$

El primer individuo sólo se preocupa de lo que a él le corresponde, mientras que los individuos segundo y tercero están más pendientes de lo percibido por el otro que por lo obtenido por ellos mismos (un caso extremo de envidia). Consideremos la distribución igualitaria, $e = (1/3, 1/3, 1/3)$, cuyas correspondientes utilidades son $u_1(e) = 1/3$, $u_2(e) = u_3(e) = -1/3$. Es fácil ver que e no es eficiente, ya que está dominada por $z = (1, 0, 0)$, para la cual la distribución de utilidades asociada viene dada por $u_1(z) = 1$, $u_2(z) = u_3(z) = 0$.

En este trabajo nos proponemos analizar hasta qué punto la presencia de externalidades resulta compatible con la existencia de asignaciones justas (eficientes y libres de envidia). Nuestro resultado principal es que *existe una familia amplia de funciones de utilidad con externalidades para las cuales la división igualitaria es la única que satisface los principios de eficiencia y ausencia de envidia.* Con ello se garantiza que la conclusión relativa al caso sin externalidades se mantiene en un contexto mucho más amplio, es decir, es en buena medida una conclusión *robusta.*

2. El modelo formal

Consideremos el problema de distribución de un bien perfectamente divisible entre n individuos. Cada uno de estos individuos tiene una relación de preferencias en la que admitimos la existencia de externalidades (nótese que en este contexto, las externalidades son un fenómeno completamente natural: mi satisfacción puede depender no sólo de la cantidad que yo recibo del bien, sino que también pueden influir las cantidades que reciben los demás). Con objeto de expresar formalmente esta idea, supondremos que las preferencias de cada individuo i son representables por una función de utilidad (continua)[1] definida sobre asignaciones completas del bien.

El espacio de las posibles asignaciones será R^n_+, donde cada elemento $x = (x_1, ..., x_n)$ se interpreta como una distribución de una cierta cantidad M del bien en cuestión (con $M = x_1 + x_2 + ... + x_n$), de forma que el individuo i-ésimo recibe la cantidad x_i, $i = 1, ..., n$. Así, para cada individuo, las preferencias están definidas por una función continua u_i: $R^n_+ \rightarrow R$.

Denotamos por u: $R^n_+ \rightarrow R^n$, tal que, para todo $x \in R^n_+$,

$$u(x) = [u_1(x), ..., u_n(x)].$$

Dada una cantidad M de bien a repartir entre n individuos, el conjunto de asignaciones *factibles* es $\{x \in R^n_+ / \sum_{i=1}^{n} x_i \leq M\}$.

Consideremos ahora las siguientes definiciones:

Definición 1. Dada una cantidad M de bien a repartir, diremos que una asignación factible $x \in R^n_+$ es *eficiente* si no existe otra asignación factible $y \in R^n_+$ tal que $u(y) \geq u(x)$, con algún j tal que $u_j(y) > u_j(x)$.

Dada una asignación $x \in R^n_+$, definamos la asignación $x(i,j)$ de la siguiente manera:

$$x_k(i,j) = x_k, \forall k \neq i,j; \quad x_i(i,j) = x_j; \quad x_j(i,j) = x_i;$$

La asignación $x(i,j)$, pues, asigna a todos los individuos diferentes del i,j, exactamente las mismas cantidades que disfrutaban en x. Por su parte, los indivi-

[1] Ello supone admitir, para cada individuo, preferencias transitivas y continuas.

duos i,j, disfrutan, respectivamente, las cantidades que en x disfrutaba el otro.

Definición 2. Diremos que una asignación $x \in R^n_+$ es *libre de envidia* cuando para todo $j = 1, ..., n$, se cumple $u_j(x) \geq u_j[x(i,j)]$, $\forall i \neq j$.

Es decir, una asignación es libre de envidia cuando a ningún individuo le gustaría cambiar su dotación con la de ningún otro individuo.

Definición 3. Dada una cantidad M de bien a repartir, diremos que una asignación factible $x \in R^n_+$ es *justa* si es simultáneamente eficiente y libre de envidia.

Nos proponemos ahora identificar condiciones suficientes sobre las preferencias de los individuos que garanticen la existencia y fácil cómputo de asignaciones justas. Comencemos considerando el siguiente supuesto:

(S.1) Sean x, y $\in R^n_+$ dos distribuciones tales que $x \neq y$, y sea

$$||x - y||_\infty = \max\{|x_1 - y_1|,...,|x_n - y_n|\},$$

donde $|\cdot|$ designa el valor absoluto. Entonces,

$$|x_j - y_j| = ||x - y||_\infty \text{ implica: } (x_j - y_j)\,[u_j(x) - u_j(y)] > 0$$

El supuesto (S.1) nos dice que, al comparar dos posibles distribuciones del bien, x e y, aquel individuo para el cual el cambio es mayor se encontrará mejor si el cambio es positivo, y peor si el cambio es negativo.

El supuesto (S.1) posee fuertes implicaciones sobre las asignaciones que pueden ser eficientes y libres de envidia. En efecto, bajo (S.1), sólo pueden ser eficientes asignaciones que agoten el bien, y sólo pueden ser libres de envidia asignaciones que proporcionen idénticas cantidades de bien a los diferentes individuos. En consecuencia, sólo puede ser justa la asignación igualitaria. Además, en el caso de que el problema involucre únicamente a dos individuos, la asignación igualitaria *es* justa. Formalmente:

Proposición 1. Bajo el supuesto (S.1), x es una asignación justa sólo si coincide con la distribución igualitaria; además, si $n = 2$, la asignación igualitaria es justa.

Prueba:

Veremos, en primer lugar, que si x es eficiente, ha de agotar el bien. En efecto, supongamos que existe una asignación x eficiente, tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i < M$. Sea entonces $\delta = M - \sum_{i=1}^{n} x_i > 0$, y consideremos la asignación z tal que $z_i = x_i + \delta/n$, para todo $i = 1, ..., n$.

Evidentemente, $\|x - z\|_\infty = |x_i - z_i| = \delta/\mathrm{n} > 0$, para todo i, por lo que, por (S.1), $u_i(z) > u_i(x)$, para todo i, en contra de la eficiencia de x.

Veamos ahora que si x es libre de envidia, necesariamente todos los individuos disfrutan de idéntica cantidad de bien. En efecto, supongamos que existe una asignación x libre de envidia de forma que para dos individuos, i, j, se tiene que $x_i \neq x_j$. Consideremos la asignación $x(i,j)$. Se tiene entonces que

$$\|x - x(i,j)\|_\infty = |x_i - x_i(i,j)| = |x_j - x_j(i,j)| = |x_i - x_j| > 0$$

por lo que, o bien $x_i - x_j > 0$, en cuyo caso el individuo j envidia al i, o bien $x_j - x_i > 0$, y es el individuo i el que envidia al j.

Como consecuencia de las dos observaciones anteriores, si x es justa, ha de coincidir con la distribución igualitaria.

Sea ahora $n = 2$. Para ver que, en este caso, la asignación igualitaria $e = (M/2, M/2)$, es justa, basta ver que es eficiente.

Supongamos que no. Entonces, existe otra asignación factible x, tal que x es tan buena como e para ambos individuos, y al menos para uno de ellos es mejor. Al ser $x \neq e$, una de las componentes de x ha de ser menor que $M/2$. Sea $x_1 < M/2$. Obviamente, no puede suceder que $|x_1 - M/2| = \|x - e\|_\infty$, pues en tal caso, $u_1(e) > u(x)$. Por tanto, $|x_2 - M/2| = \|x - e\|_\infty$, y, forzosamente, $x_2 > M/2$. Pero entonces se tiene que $x_2 - M/2 > M/2 - x_1$, de donde se sigue que $x_1 + x_2 > M$, y por tanto x no es factible. En consecuencia, e es eficiente y por tanto justa.

La Proposición 1 indica que, bajo el supuesto $(S.1)$ sólo hay una asignación candidata a *justa*: la distribución igualitaria. Desafortunadamente, no basta con el supuesto $(S.1)$ para que dicha asignación sea eficiente, excepto en el caso particular de $n = 2$. El siguiente ejemplo presenta una situación en la que el supuesto $(S.1)$ se satisface, pero la distribución igualitaria no es eficiente:

Ejemplo 2: Consideremos el problema de distribuir 3 unidades de un bien entre 3 individuos, cuyas utilidades son

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x_1 \\ u_2(x) &= x_2 + 0.6\, x_1 \\ u_3(x) &= x_3 + 0.6\, x_1 \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $(S.1)$ se satisface: si tomamos el individuo 2, y consideramos dos asignaciones x, y, de tal forma que $\|x - y\|_\infty = |x_2 - y_2|$, es claro que $u_2(x) > u_2(y)$ siempre que $x_2 > y_2$, pues el aumento de utilidad derivado del propio incremento en el bien resulta mayor que la posible disminución derivada del cambio en las cantidades del primer individuo, y lo mismo ocurre para el individuo 3. No obstante, la asignación igualitaria $e = (1, 1, 1)$ no es eficiente. En efecto, $u(e) = (1, 1.6, 1.6)$, y si consideramos la asignación $x = (3, 0, 0)$, las utilidades que se obtienen son $u(x) = (3, 1.8, 1.8)$.

El ejemplo 2 es un caso en el cual no existe ninguna asignación justa, es decir, simultáneamente eficiente y libre de envidia. Para garantizar la existencia de asignaciones justas en el contexto del supuesto ($S.1$), necesitamos introducir alguna restricción adicional sobre las preferencias.

Consideremos el supuesto adicional siguiente:

($S.2$) Sean x, y $\in R^n_+$ dos distribuciones tales que $x > y$. Si se verifica que $x_j = y_j$ entonces

$$u_j(x) \leq u_j(y)$$

($S.2$) indica que al cambiar una asignación dada por otra nueva en la que algunos agentes perciben mayores cantidades del bien, mientras que otros permanecen igual, estos últimos no se sienten más felices (este supuesto constituye una forma natural de expresar la idea de que los agentes toman también en cuenta la *cantidad relativa* de bien que perciben).

Si además de ($S.1$) pedimos que se satisfaga ($S.2$), podemos garantizar no sólo que la distribución igualitaria es eficiente, sino que lo es *toda distribución que agote el bien* (nótese que el supuesto ($S.2$) por sí solo no garantiza este resultado, como se desprende del Ejemplo 1).

Proposición 2. Bajo los supuestos ($S.1$) y ($S.2$), y dada una cantidad fija M del bien, si $\Sigma x_i = M$, entonces x es eficiente.

Prueba:
Sea x una asignación que agota el bien. Veremos que x es eficiente en dos pasos. En primer lugar, consideraremos el programa:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min } \Sigma z_i \\ \text{s. a } \Sigma z_i \leq M \\ \quad u(z) \geq u(x) \\ \quad z \geq 0 \end{array}\right\} \quad (P)$$

El programa (P) tiene una solución, y. En primer lugar, veremos que y debe agotar la cantidad disponible de bien. Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} y_i < M$. Entonces, ha de existir algún individuo (el j), tal que $y_j < x_j$. Pero este individuo no puede ser el que experimente una variación mayor en la cantidad de bien, al pasar de x a y, pues en tal caso, $u_j(y) < u_j(x)$, con lo que y no verificaría las restricciones del programa. Entonces, existe un k tal que $\|y - x\|_\infty = |y_k - x_k| > 0$. Para este individuo se cumple que $u_k(y) > u_k(x)$, por ($S.1$). Nótese que $y_k > 0$. Tomemos entonces una nueva asignación z, construida de la siguiente manera:

$$z_s = y_s, \text{ para todo } s \neq k$$

$$z_k < y_k, \text{ de tal forma que } u_k(z) > u_k(x)$$

es posible construir tal z, por la hipótesis de continuidad de las funciones de utilidad. Entonces, por ($S.2$), se tiene que para todo $s \neq k$, $u_s(z) \geq u_s(y) \geq u_s(x)$, y, por construcción, $u_k(z) > u_k(x)$, por lo que z verifica las restricciones del programa (P). Además, $\sum_{i=1}^{n} z_i < \sum_{i=1}^{n} y_i$, por lo que y no es la solución de (P), en contra de la hipótesis. Así pues, si y es solución de (P), ha de verificarse forzosamente que $\sum_{i=1}^{n} y_i = M$.

Veamos ahora que x ha de ser eficiente. Supongamos que no es así; entonces existiría una asignación factible z tal que $\sum_{i=1}^{n} z_i \leq M$, $z \geq 0$, de forma que $u(z) > u(x)$, esto es, $u_i(z) \geq u_i(x)\ \forall i$, y para algún j, $u_j(z) > u_j(x)$. Nótese que $(S.1)$ implica que $\|z - x\|_\infty$ debe alcanzarse en alguno de estos índices j, y para dicho índice, $z_j > 0$. Entonces, disminuyendo ligeramente z_j y manteniendo el resto de componentes invariables, podemos construir otra asignación que verifica todas las restricciones de (P), en la que no se consume todo el bien, llegando a contradicción con el resultado anterior de que la solución de (P) ha de agotar la cantidad M de bien a repartir. Por tanto, x es eficiente.

La Proposición 2 nos dice que, cuando se dan simultáneamente los supuestos $(S.1)$ y $(S.2)$, toda asignación que agota el bien es eficiente. Tenemos entonces garantizada la existencia de asignaciones simultáneamente eficientes y libres de envidia. De hecho, la unión de los dos supuestos indicados nos singulariza una única asignación justa: la distribución igualitaria. Formalmente:

Corolario: Bajo los supuestos $(S.1)$ y $(S.2)$, x es una asignación justa si y sólo si coincide con la distribución igualitaria.

El corolario anterior establece que si deseamos obtener asignaciones eficientes y libres de envidia en la distribución de un bien entre diversos individuos $(n > 2)$, cuando se cumplen los supuestos $(S.1)$ y $(S.2)$, no necesitamos ningún tipo de información sobre las preferencias individuales. Sólo hay una forma de conseguirlo y es mediante la distribución igualitaria del bien. Ello proporciona una cualificación adicional que justifica el empleo de la división igualitaria como un punto de referencia en temas de reparto, incluso en presencia de externalidades.

3. Resumen y comentarios finales

Nos hemos ocupado en este trabajo de la construcción de un modelo formal para la distribución entre n individuos de una cantidad dada de un bien divisible, en un contexto caracterizado por la presencia de externalidades. El criterio de justicia distributiva adoptado es uno de los habituales en la literatura: hemos considerado que una asignación es *justa* cuando resulta, simultáneamente, eficiente y libre de envidia.

El principal resultado obtenido consiste en la identificación de una familia de preferencias con externalidades, que generaliza el modelo convencional de preferencias isótonas, al tiempo que conserva la propiedad de que una asignación es justa si y sólo si es la división igualitaria.

Los dos supuestos que permiten este resultado se refieren a la existencia de una mínima sensibilidad de la función de utilidad respecto a cambios en las cantidades percibidas [Supuesto (S.1)], y a la ausencia de altruismo [Supuesto (S.2)]. Ambos supuestos son de naturaleza ordinal, y no requieren ningún tipo de comparaciones interpersonales de utilidad. Con ellos estamos limitando ciertamente los tipos de externalidades admisibles, pero se trata de supuestos con un claro contenido intuitivo, y que resultan plenamente aceptables en muchos contextos (aunque desde luego no en aquéllos donde el altruismo sea una parte relevante de las relaciones entre los agentes).

Referencias

Moulin, H. (1988): *Axioms of Cooperative Decision Making,* Cambridge U. Press, New York.

Sen, A. (1986): «Social Choice Theory», en *Handbook of Mathematical Economics,* K. J. Arrow & M. Intrilligator, Eds., vol. III, North Holland, Amsterdam.

Thomson, W. y Varian, H. (1985): «Theories of Justice based on Symmetry», Ch. 4 en Hurwicz et al., Eds.

Abstract

This paper deals with the analysis of a pure distribution problem, consisting of finding equitable ways of dividing a single and perfectly divisible good, when externalities are present. The main result is the identification of a family of utility functions with externalities, for which an allocation is envy-free and efficient if and only if it is the equal division.

Recepción del original, noviembre de 1991
Versión final, mayo de 1992