INVESTIGACIONES ECONOMICAS. Volumen XX (3) - Septiembre, 1996, pp. 403-409

FUNDAMENTOS DE BIENESTAR DE LOS INDICES DE DESIGUALDAD PERTENECIENTES A LA CLASE DE LA ENTROPIA GENERALIZADA

Rafael SALAS*

Universidad Complutense de Madrid

En este trabajo se deriva la familia de funciones de bienestar social consistente con los índices de desigualdad de entropía generalizada, lo que imprime un carácter normativo a tales índices, y se demuestra la ausencia de equivalencia ordinal entre las preferencias sociales de las que se derivan los índices de entropía generalizada y los índices de Atkinson equivalentes.

1. Introducción

En este trabajo se deducen las funciones de bienestar social (FBS) consistentes con los índices de desigualdad de entropía generalizada (EG), definidos por Cowell (1977). Esto es, se derivan las FBS que pueden representarse sólo con dos parámetros: la renta media y el propio índice de desigualdad EG. Por otra parte, se demuestra la ausencia de equivalencia ordinal entre las FBS de las que se derivan consistentemente los índices EG y los índices de Atkinson (A) equivalentes.

Desde una perspectiva histórica, Blackorby y Donaldson (1978) y, posteriormente a partir de un enfoque de bienes personalizados, Herrero y Villar (1989) y Tomás y Villar (1993) caracterizan un indicador de bienestar del que puede derivarse consistentemente el índice de Theil clásico, un caso particular de los índices EG. Estos últimos autores y Ebert (1988) plantearon los problemas de consistencia de este tipo de índices con FBS monótonas en las rentas de los hogares.

A partir de los resultados de Blackorby y Donaldson (1978), Ebert (1987) y Dutta y Esteban (1992) deducimos la familia de FBS consistente con los índices EG y caracterizamos a los índices de EG como índices de Atkinson generalizados (AG). La implicación más importante es que podemos dar a los índices EG un carácter normativo y un significado cuantitativo en términos del coste social de la desigualdad. Esto los iguala a otros índices muy utilizados en la literatura, como son los índices A y los índices de Gini generalizados (GG)

* Agradezco los comentarios de Rafael Repullo, Isabel Rabadán y de los evaluadores anónimos. Los posibles errores son de mi entera responsabilidad. Este papel es parte de un Programa de Investigación de una Red financiada por la Unión Europea (Contrato #ERBCHRXCT940647), coordinado por Patrick Moyes.

–veánse Sen (1973) para el índice de Gini clásico y Mulière y Scarsini (1989)[1].

Por otra parte, un subconjunto de índices EG es ordinalmente equivalente a los índices A (es decir, que ambos predicen variaciones de la desigualdad con el mismo signo) –véase Ebert (1988)–, lo cual plantea la utilización de solamente uno de ellos en trabajos relativos a la medición de la desigualdad. No obstante, en este trabajo demostramos que esta equivalencia ordinal no se produce entre las funciones de bienestar consistentes con ellos. La implicación es que, aunque los índices sean ordinalmente equivalentes, las preferencias sociales implícitas poseen diferentes nociones cuantitativas sobre la aversión a la desigualdad en relación a la eficiencia, con sus repercusiones en la utilización de los índices en el análisis económico.

2. Notación y definiciones

Una función de bienestar social (FBS) es una función $W(y)$ que mide el bienestar social asociado a un vector de rentas equivalentes[2] $y = (y_1, y_2, \ldots, y_H)$ de los H hogares de la economía. Un índice de desigualdad $I(y)$ se dice que es *consistente* con una FBS $W(y)$ si para dos distribuciones cualesquiera, x e y, con la misma renta media $\bar{x} = \bar{y}$, se tiene:

$$I(y) \geq I(x) \Leftrightarrow W(y) \leq W(x). \qquad [1]$$

Dada una FBS cualquiera $W(y)$, el correspondiente *índice de desigualdad de Atkinson generalizado* AG (véase Atkinson, 1970) se define como

$$I_{AG}(y) = 1 - \frac{y^*}{\bar{y}}, \qquad [2]$$

donde y^* es la renta equivalente igualitariamente distribuida definida por

$$W(y) = W(y^*, y^*, \ldots, y^*). \qquad [3]$$

Si la FBS $W(y)$ es simétrica, monótona, continua y estrictamente cuasi-cóncava, el índice $I_{AG}(y)$ es simétrico, estrictamente cuasi-convexo y está comprendido entre 0 y 1. Además, la función $W(y)$ se puede expresar como

[1] A diferencia del resto de los índices aquí considerados, los índices de Gini sólo son cuasi-convexos, consistentes con funciones de bienestar social cuasi-cóncavas, no estrictamente cuasi-cóncavas; véase Newbury (1970).

[2] Definimos la renta o gasto equivalente como la renta monetaria del hogar dividida por una escala de equivalencia, que iguala, fijados los precios relativos, las funciones de gasto entre hogares heterogéneos; véase Deaton y Muellbauer (1980).

$$W(y) = f(\bar{y}(1 - I_{AG}(y))), \qquad [4]$$

donde $f(\cdot)$ es cualquier función monótona creciente. A partir de aquí es inmediato concluir que todo índice AG es consistente con la FBS de la que se deriva.

Dos índices de desigualdad, $I^1(y)$ e $I^2(y)$ se dice que son *ordinalmente equivalentes* si existe una función monótonamente creciente $g(\cdot)$ tal que

$$I^1(y) \equiv g(I^2(y)), \qquad g' > 0. \qquad [5]$$

Los *índices de entropía generalizada* (EG) se definen para cada c ∈ R de la siguiente manera (véase Cowell, 1977):

$$I_{EG(c)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{H}\dfrac{1}{c(c\text{-}1)} \sum_{i=1}^{H} [(y_i/\bar{y})^{c}\text{-}1], & si\ c \neq 0,1 \\ \dfrac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} Ln(\bar{y}/y_i), & si\ c = 0 \\ \dfrac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} [(y_i/\bar{y})\, Ln\,(y_i/\bar{y})], & si\ c = 1 \end{cases} \qquad [6]$$

Los índices EG incluyen al índice de desigualdad de Theil «clásico» (el primero definido por Theil, 1967), como un caso particular cuando $c = 1$. Sus propiedades los hacen atractivos: son simétricos, continuos, estrictamente cuasi-convexos y homogéneos de grado 0 (es decir, relativos o invariantes con respecto a la escala) [3]. Como demuestran Blackorby y Donaldson (1978), Ebert (1987) y Dutta y Esteban (1992), estas propiedades los hacen consistentes con funciones de bienestar social $W(y)$ que son simétricas, continuas, estrictamente cuasi-cóncavas y homotéticas, que se deben poder expresar de la forma:

$$W(y) = f(\bar{y}(1 - I_{EG(c)}(y))), \qquad [7]$$

donde $f(\cdot)$ es una función monótonamente creciente. Un inconveniente de estas FBS, resaltado por Ebert (1988) y Tomás y Villar (1993), es que no son monótonas, debido a que los índices EG pueden ser mayores que la unidad.

[3] Además son descompatibles aditivamente en subgrupos de población con ponderaciones de las desigualdades intragrupos que suman la unidad para los casos $c = 0$ (ponderaciones demográficas) y $c = 1$ (ponderaciones en función de la renta); véanse Shorrocks (1980) y Ruiz-Castillo (1995).

Finalmente, los *índices de desigualdad de Atkinson* (A) se definen para cada $\epsilon > 0$ de la siguiente manera (véase Atkinson, 1970):

$$I_{A(\epsilon)}(y) = \begin{cases} 1 - [\frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} (y_i / \bar{y})^{1-\varepsilon}]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, & si\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon \neq 1 \\ 1 - \exp [\frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} Ln\,(y_i / \bar{y})], & si\ \varepsilon = 1 \end{cases} \qquad [8]$$

donde ε es un parámetro de la aversión a la desigualdad relativa. Estos índices se derivan consistentemente de FBS simétricas, continuas, estrictamente cuasi-cóncavas, homotéticas y monótonas, que se pueden expresar como

$$W(y) = f(\bar{y}(1 - I_{A(\varepsilon)}(y))), \qquad [9]$$

donde $f(\cdot)$ es una función monótonamente creciente. De hecho, Atkinson (1970) derivó el índice de desigualdad A, como un índice AG a partir de una FBS como la que se deduce sustituyendo [8] en [9].

3. Resultados

La familia de FBS de las que se derivan consistentemente los índices EG se obtiene sustituyendo [6] en [7]:

$$W_{EG(c)}(y) = \begin{cases} f(\bar{y}\,(1 + \frac{1}{c(c-1)} \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} (1-(y_i/\bar{y})^c))), & si\ c \neq 1,0 \\ f(\bar{y}\,(1 + \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} Ln(y_i/\bar{y}))), & si\ c = 0 \\ f(\frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} y_i (1 - Ln(y_i/\bar{y}))), & si\ c = 1 \end{cases} \qquad [10]$$

que como comentamos en la sección anterior es simétrica, continua, estrictamente cuasi-cóncava y homotética, pero no monótona. Sin embargo, esta clase de funciones cumple, dado [7] y en los casos en que el índice de desigualdad es menor que la unidad[4], lo que denominamos *monotonicidad agregada* (menos restrictiva que la monotonicidad clásica): el bienestar social, fijado el índice de desigualdad, es una función monótonamente creciente de la renta

[4] Casos a los que nos restringimos en este análisis, que empíricamente son los más frecuentes y relevantes. Otra alternativa sería garantizar la monotonicidad clásica centrándonos en los índices EG «normalizados» por una transformación similar a la realizada por Tomás y Villar (1993).

media. La implicación más importante de este resultado es que los índices EG adquieren un carácter normativo, ya que pueden derivarse como índices AG a partir de una FBS explícita como la de la expresión [10]. Como casos particulares de índices AG, los índices EG adquieren la interpretación clásica del coste social de la desigualdad que tienen los índices AG: indican, dadas las preferencias sociales, la proporción de renta media que la sociedad está dispuesta a renunciar con tal de garantizar la igualdad perfecta.

Es bien conocido (véase, por ejemplo, Ebert, 1988) que un subconjunto de los índices EG (en concreto, aquéllos para los que $c < 1$) son ordinalmente equivalente a los índices A. En concreto, para $c = 1 - \varepsilon$ se tiene que:

$$I_{EG(c)}(y) = \begin{cases} [(1 - I_{A(\varepsilon)})^{1-\varepsilon} - 1] / \varepsilon(\varepsilon - 1), & \text{si } \varepsilon > 0,\ \varepsilon \neq 1 \\ -Ln\,(1 - I_{A(\varepsilon)}), & \text{si } \varepsilon = 1 \end{cases} \qquad [11]$$

Este resultado se emplea habitualmente en el análisis empírico para mostrar la equivalencia de la utilización de cualquiera de estos índices. Sin embargo, vamos a demostrar que esta equivalencia ordinal no se produce entre las FBS $W_{EG(c)}(y)$ y $W_{A(\varepsilon)}(y)$ para $c = 1 - \varepsilon$, lo que refleja diferentes preferencias sociales respecto a la distribución de la renta[5].

Para ello, comparamos la relación marginal de sustitución social (RMS) entre la renta de dos individuos para las dos FBS. En el caso de $W_{EG(c)}(y)$ la RMS depende de todas las rentas individuales en relación a la media:

$$\left.\frac{dy_i}{dy_j}\right|_{\bar{W}_{EG(c)}} = \begin{cases} -\dfrac{\dfrac{1}{c(c-1)} + c\sum_{i=1}^{H}[\frac{1}{H}(y_i/\bar{y})^c] + (c-1)(y_j/\bar{y})^{c-1}}{\dfrac{1}{c(c-1)} + c\sum_{i=1}^{H}[\frac{1}{H}(y_i/\bar{y})^c] + (c-1)(y_i/\bar{y})^{c-1}}, & si\ c \neq 1,0 \\ -\dfrac{\sum_{i=1}^{H}[\frac{1}{H}Ln(y_i/\bar{y})] + \bar{y}/y_j}{\sum_{i=1}^{H}[\frac{1}{H}Ln(y_i/\bar{y})] + \bar{y}/y_i}, & si\ c = 0 \\ -\dfrac{-Ln(y_j/\bar{y}) + y_j/\bar{y}}{-Ln(y_i/\bar{y}) + y_i/\bar{y}}, & si\ c = 1 \end{cases} \qquad [12]$$

[5] De hecho este resultado es más general y afecta a cualesquiera dos índices AG, $I_{AG}^1(y)$ e $I_{AG}^2(y)$, que sean ordinalmente equivalentes. Las FBS consistentes con ellos no son ordinalmente equivalentes entre sí. Nótese que de (4) las FBS de las cuales se derivan los dos índices son $W_{AG}^1(y) = f^1(\bar{y}(1 - I_{AG}^1(y))) = f^1(\bar{y}(1 - g(I_{AG}^2(y))))$ y $W_{AG}^2(y) = f^2(\bar{y}(1 - I_{AG}^2(y)))$ respectivamente. Es fácil comprobar que son ordinalmente equivalentes si (y sólo si) ambos índices coinciden:

$$W_{AG}^1(y) = h\,[W_{AG}^2(y)] \Leftrightarrow I_{AG}^1(y) = I_{AG}^2(y).$$

$$\left.\frac{dy_i}{dy_j}\right|_{\bar{W}_{A(\varepsilon)}} = -\left(\frac{y_j}{y_i}\right)^{-\varepsilon}, \varepsilon > 0 \qquad [13]$$

En el Gráfico 1 se ilustra este resultado mediante un ejemplo de las curvas de indiferencia social correspondientes a las FBS $W_{EG(0)}(y)$ y $W_{A(1)}(y)$. Consideramos una sociedad con dos individuos y representamos las curvas de indiferencia social que pasan por el punto inicial $(y_1, y_2) = (100{,}200)$. Estas curvas no coinciden, lo que indica que las FBS de las que se derivan que no son ordinalmente equivalentes entre sí, reflejando $W_{EG(0)}(y)$ una mayor aversión a la desigualdad que $W_{A(1)}(y)$. En este caso, dado que ambos índices son casos particulares de índices AG, es fácil observar que a partir de los valores de la renta equivalente igualitariamente distribuida (gráficamente coincide con los puntos de corte de las curvas de indiferencia social con la línea de 45° de la igualdad perfecta), $y^*_{EG(C=0)} = 141{,}17 < y^*_{A(\varepsilon=1)} = 141{,}48$. Ayudándonos de la ecuación [2], se deduce que $I_{EG(0)} = 0{,}\ 0589 > I_{A(1)} = 0{,}0572$.

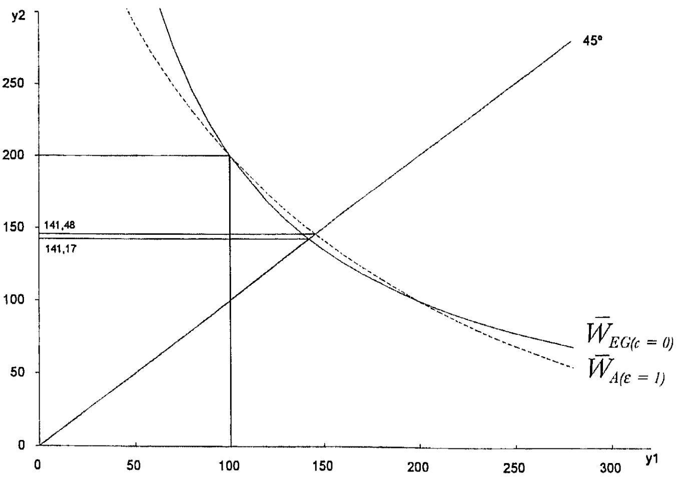

Gráfico 1
Curvas de indiferencia social

La implicación de este resultado es que ambos índices, aunque sean equivalentes y por lo tanto no aportan nada cualitativamente diferente en el análisis de la desigualdad, incorporan nociones cuantitativas diferentes sobre el grado de aversión a la desigualdad frente a la eficiencia, aspecto importante éste que puede tener repercusiones, por ejemplo, en la evaluación de los efectos de la política económica.

Referencias

Atkinson, A. B. (1970): «On the measurement of inequality», *Journal of Economic Theory* 2, pp. 244-263.

Blackorby, C. y Donaldson, D. (1978): «Measures of relative inequality and their meaning in terms of social welfare», *Journal of Economic Theory* 18, pp. 59-80.

Cowell, F. A. (1977): *Measuring inequality*, Philip Allen, Oxford.

Deaton, A. y Muellbauer, J. (1980): *Economics and Consumer Behaviour*, Cambridge University Press, Cambridge.

Dutta, B. y Esteban, J. M. (1992): «Social welfare and equity», *Social Choice and Welfare* 50, pp. 49-68.

Ebert, U. (1987): «Size and distribution of incomes as determinants of welfare», *Journal of Economic Theory* 41, pp. 23-33.

Ebert, U. (1988): «Measure of inequality: An attempt at unification and generalisation», *Social Choice and Welfare* 5, pp. 147-169.

Herrero, C. y Villar, A. (1989): «Comparaciones de renta real y evaluación del bienestar», *Revista de Economía Pública* 2, pp. 79-101,

Mulière, P. y Scarsini, M. (1989): «A Note on stochastic dominance and inequality measures», *Journal of Economic Theory* 49, pp. 314-323.

Newbury, D. (1970): «A theorem on the measurement of inequality», *Journal of Economic Theory* 2, pp. 264-266.

Ruiz-Castillo, J. (1995): «Income distribution and social welfare», *Investigaciones Económicas* 19, pp. 3-34.

Sen, A. (1973): *On Economic Inequality*, Oxford University Press, Oxford.

Shorrocks, A. (1980): «The class of additively decomposable inequality measurements», *Econometrica* 50, pp. 3-17.

Theil, H. (1967): *Economics and Information Theory*, North Holland, Amsterdam.

Tomás, J. M. y Villar, A. (1993): «La medición del bienestar mediante indicadores de renta real: caracterización de un índice de bienestar tipo Theil», *Investigaciones Económicas* 17, pp. 165-173.

Abstract

This paper derives the Social Welfore Functions which are consistent with the General Entropy inequality indices, and shows the absence of ordinal equivalence between the social preferences from which the General Entropy and equivalent Atkinson inequality indices are derived.

Recepción del original, julio de 1995
Versión final, mayo de 1996