

LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS EN ESPAÑA: EL MODELO DE COX, INGERSOLL Y ROSS

PAZ RICO BELDA
Universidad de Valencia

En este trabajo se utiliza el modelo de equilibrio general intertemporal estocástico en tiempo continuo de Cox, Ingersoll y Ross para modelizar y analizar la formación de precios en el mercado de deuda pública y estimar la estructura temporal de los tipos de interés, durante el período que abarca desde enero de 1991 a diciembre de 1995. Los resultados obtenidos indican que el modelo se ajusta bien al comportamiento de los precios de la deuda pública. No obstante, presenta problemas de identificación de los parámetros y un peor ajuste en los títulos a más largo plazo, lo que dada su complejidad de cálculo, le resta atractivo frente a modelos más parsimoniosos.

Palabras clave: Estructura temporal de los tipos de interés, Dinámica del tipo de interés, Proceso estocástico, Modelo unifactorial.

(JEL C78)

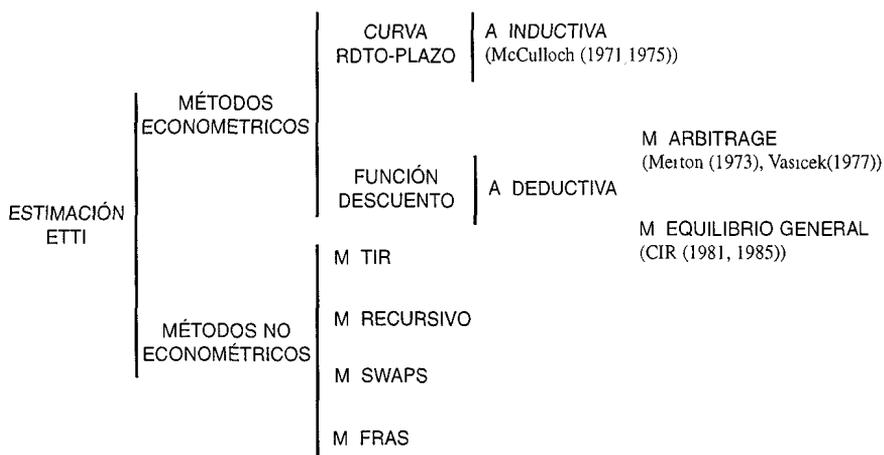
1. Introducción

La estructura temporal de los tipos de interés (ETTI), que relaciona las tasas libres de riesgo de insolvencia con su plazo, constituye uno de los campos de investigación más activos de la economía financiera. Ahora bien, a partir de los precios de deuda pública, que son activos financieros exentos de riesgo de crédito con mercados secundarios profundos para un amplio espectro de plazos, los tipos de interés relevantes sólo pueden observarse directamente para aquellos títulos

Una versión preliminar de este artículo apareció como Working Paper-EC 98-07 del Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas. Este trabajo es parte de un capítulo de mi tesis doctoral dirigida por D. Javier Quesada Ibáñez. Quisiera agradecer a D. Javier Quesada y a D. Ezequiel Uriel su ayuda prestada así como sus valiosos comentarios. Asimismo, quisiera hacer constar mi agradecimiento por las sugerencias de dos evaluadores anónimos. No obstante, todos los errores son sólo responsabilidad mía

emitidos a descuento, lo que en el caso español sólo era posible, hasta recientemente, para vencimientos inferiores a un año¹. Como los tipos observados para plazos superiores contienen generalmente primas de liquidez, sesgo de fiscalidad y de cupón, es necesario obtener la ETTI mediante algún método de estimación. El siguiente esquema recoge los distintos procedimientos de estimación existentes en la literatura. En Nuñez (1995) se pueden encontrar referencias detalladas para cada uno de ellos, a excepción de la estimación de la función de descuento mediante los modelos de la corriente deductiva como el utilizado en este trabajo.

ESQUEMA
MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE LA ETTI



En los procedimientos de la corriente deductiva, que están directamente inspirados en los modelos de valoración de opciones de Black y Scholes (1973) y en el concepto de equilibrio de la ETTI bajo incertidumbre introducido por Merton (1973a), se define *a priori* una forma funcional para la evolución temporal de los tipos de interés, y tras imponer una serie de restricciones, se estiman los parámetros que caracterizan dicha forma funcional. Dentro de la misma cabe distinguir dos posibles variantes:

Modelos de no arbitraje (Merton (1973a), Vasicek (1977), Dothan (1978), Brennan y Schwartz (1979, 1980)), que utilizan condiciones necesarias para que no existan oportunidades de arbitraje, aunque no

¹A partir del 28 de abril de 1997 se emiten letras del Tesoro a 18 meses. Asimismo, recientemente han aparecido los denominados "strips" que permiten negociar por separado el principal y cada uno de los pagos intermedios de un título.

especifican condiciones suficientes. En dichos modelos, los precios de los bonos a descuento dependen de un número finito de variables económicas fundamentales, denominadas variables de estado, que siguen procesos estocásticos en los que el riesgo se especifica exógenamente.

Modelos de equilibrio general (Cox, Ingersoll y Ross (1985), Longstaff (1989), Longstaff y Schwartz (1992), Platten (1994)), basados en el modelo de valoración intertemporal de activos de Merton (1973b) y el modelo de equilibrio con expectativas racionales de Lucas (1978). Estos modelos requieren fuertes supuestos sobre preferencias, entorno y tecnología. La estructura temporal, su dinámica y la forma funcional del precio del riesgo son determinadas endógenamente y, en este sentido, tienen claras ventajas sobre la del arbitraje.

En este trabajo se estima el modelo de equilibrio general intertemporal estocástico en tiempo continuo de Cox, Ingersoll y Ross (CIR) utilizando precios de deuda pública para el período 01:1991-12:1995². El propósito es analizar si el modelo explica la formación de precios en el mercado de deuda de tal modo que se pueda obtener satisfactoriamente la ETTI implícita en dichos precios. La conclusión a la que se llega es que aunque el modelo CIR se ajusta bien a los datos, presenta problemas de identificación de los parámetros y un peor ajuste en los títulos a más largo plazo, lo que dada su complejidad de cálculo, le resta atractivo frente a modelos más parsimoniosos. La estructura del trabajo es la siguiente. A continuación se expone brevemente el modelo de CIR. En el apartado tercero se estima, en primer lugar, el proceso estocástico del tipo de interés a corto plazo con datos temporales y, en segundo lugar, los precios de la deuda pública y estructura temporal de los tipos de interés con datos de corte transversal. Por último, en el cuarto apartado se recogen las principales conclusiones.

2. Modelo de equilibrio general de CIR

El modelo de CIR supone que la dinámica del tipo de interés instantáneo viene dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr = k(\mu - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz \quad [1]$$

donde k es la velocidad de ajuste del tipo de interés hacia su valor de largo plazo μ , $\sigma\sqrt{r}$ es la volatilidad que caracteriza la variación del

²Hasta 1991, el mercado español de deuda pública no es lo suficientemente homogéneo y líquido para permitir la estimación de la ETTI.

tipo de interés y dz es el incremento de un proceso Wiener estándar³. Dado este tipo de interés instantáneo, el precio en el periodo t de un bono emitido a descuento que vence en $T = t + \tau$, $P(r, t, T)$, viene dado por la siguiente expresión:

$$P(r, t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r} \quad [2]$$

donde

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \left\{ \frac{\phi_1 \exp(\phi_2 \tau)}{\phi_2 (\exp(\phi_1 \tau) - 1) + \phi_1} \right\}^{\phi_3} \\ B(t, T) &= \frac{\exp(\phi_1 \tau) - 1}{\phi_2 (\exp(\phi_1 \tau) - 1) + \phi_1} \\ \phi_1 &= [(k + \lambda)^2 + \sigma^2]^{1/2} \\ \phi_2 &= (k + \lambda + \phi_1)/2 \\ \phi_3 &= 2k\mu/\sigma^2 \end{aligned}$$

y el parámetro λ es el precio de mercado del riesgo, de tal forma que como señalan CIR, si se obtiene un valor significativamente distinto de cero, se puede rechazar la hipótesis de las expectativas puras. Así pues, el rendimiento al vencimiento de un bono emitido a descuento que vence en T vendrá dado por la siguiente expresión:

$$R(r, t, T) = \frac{-\ln P}{T-t} = \frac{1}{T-t} B(t, T)r - \frac{1}{T-t} \ln A(t, T). \quad [3]$$

Cuando el bono se aproxima a su vencimiento, su rendimiento es igual a r , mientras que si $\tau \rightarrow \infty$, el rendimiento no depende de r y es igual a:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(r, t, T) = (\phi_1 - \phi_2)\phi_3. \quad [4]$$

Considerando un bono con cupón como una cartera de bonos emitidos a descuento, su precio en t vendrá dado por:

$$PB(t, c, d) = \sum_{i=1}^T ciP(r, t, d_i), \quad [5]$$

donde c es el vector de flujos que se reciben según el vector de vencimientos d .

³Esta dinámica corresponde a un proceso continuo autorregresivo de primer orden donde los movimientos aleatorios de los tipos de interés tienden hacia el valor de largo plazo μ , y el parámetro k determina la velocidad de ajuste.

3. Estimación de los precios de la deuda pública a través del modelo de CIR

Los parámetros del modelo de equilibrio de CIR han sido estimados en la literatura tanto con datos de corte transversal como con datos temporales. A partir de las expresiones [1], [2], [3] y [5], existen de hecho tres métodos para estimar los parámetros del modelo $(k, \mu, \lambda, \sigma)$. El primero consiste en estimar los parámetros del proceso continuo (k, μ, σ) mediante una aproximación discreta de la ecuación diferencial [1], utilizando como *proxy* del tipo de interés instantáneo sin riesgo la serie histórica de un tipo de interés a corto plazo. Posteriormente se obtiene λ de [2] mediante métodos no lineales. El segundo método utiliza un panel de observaciones y estima simultáneamente todos los parámetros mediante el método de los momentos generalizados basado en [3]. Para ello, se derivan expresiones analíticas de ciertos momentos de los rendimientos de los activos, y se minimiza una norma dada de la diferencia entre estas expresiones y sus valores empíricos. Por tanto, para aplicarlo debería disponerse de observaciones de precios cupón cero con vencimiento constante que permitan, como mínimo, calcular cuatro (=número de parámetros) momentos. Sin embargo, surgen dos problemas que obligan a descartar este método (Serrat (1991)):

1. Los títulos cupón cero tienen vencimientos inferiores al año con lo que la muestra no incluiría datos del segmento a más largo plazo.
2. No existen suficientes títulos con vencimiento residual idéntico a lo largo de un determinado período.

Por último, el tercer método consiste en la estimación de corte transversal de los parámetros del modelo aplicando métodos no lineales a [5] utilizando para ello directamente los precios observados de bonos con cupón. En este contexto, Brown y Dybvig (1986) suponen que el precio observado del bono en el momento t , $PB^*(\tau)$, se desvía del precio teórico en un error ε_t de media cero⁴:

$$PB^*(\tau) = PB(\tau) + \varepsilon_t \quad [6]$$

donde el término de error ε_t se supone normal, independiente e idénticamente distribuido para todos los precios de bonos. Las ventajas

⁴En este último método se obtiene una serie temporal de las estimaciones de ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y r , pero no es posible identificar separadamente las estimaciones de k, μ y λ . Se tienen cuatro incógnitas y tres ecuaciones por lo que se trata de un sistema indeterminado.

de este método son que está basado en datos observables, lo cual evita errores de medida en la variable dependiente y permite, asimismo, obtener la estimación de la serie del tipo de interés instantáneo. Así pues, se va a utilizar el primer y último procedimiento del siguiente modo complementario: el primer método permitirá obtener información sobre parámetros necesarios en la estimación de corte transversal, mientras que el tercer procedimiento permitirá obtener el resto de parámetros y la estimación de corte transversal de la ETI.

3.1 Estimación del proceso estocástico del tipo de interés a corto plazo

Para estimar los parámetros del modelo continuo se utiliza la siguiente especificación discreta del proceso [1]⁵:

$$\begin{aligned} r_{t+1} - r_t &= k(\mu - r_t)\delta + \varepsilon_{t+1} & [7] \\ E[\varepsilon_{t+1}] &= 0 \\ E[\varepsilon_{t+1}^2] &= \sigma^2 r_t \delta \end{aligned}$$

donde el parámetro δ representa la frecuencia de las observaciones en términos de unidad de tiempo elegida⁶. Esta especificación se puede estimar por máxima verosimilitud puesto que la función de densidad de transición del proceso es conocida⁷.

Datos

En este trabajo se ha utilizado como *proxy* del tipo de interés instantáneo el tipo de interés a un día de las operaciones de compraventa con pacto de recompra de las letras del Tesoro⁸ durante el período

⁵Esta especificación discreta tiene la ventaja de permitir que la varianza de los cambios del tipo de interés dependa directamente del nivel de tipos de interés de forma consistente con el modelo continuo.

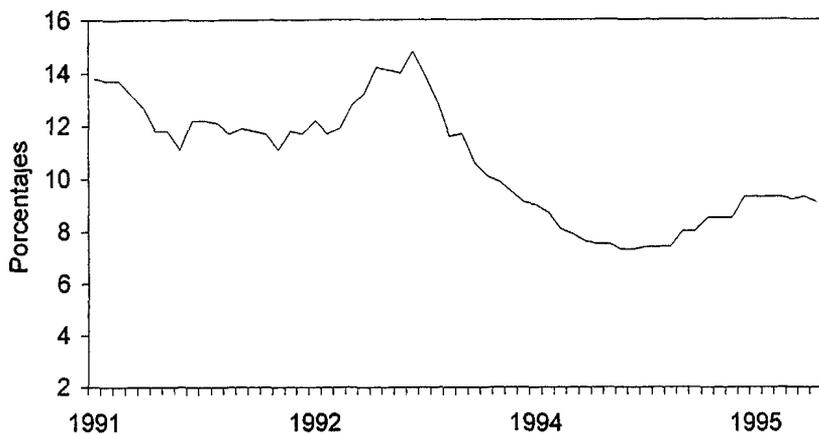
⁶Por ejemplo, para tasas anuales (la unidad de tiempo es el año) y observaciones mensuales, como es nuestro caso, $\delta = 1/12$.

⁷En nuestro caso la función de densidad es

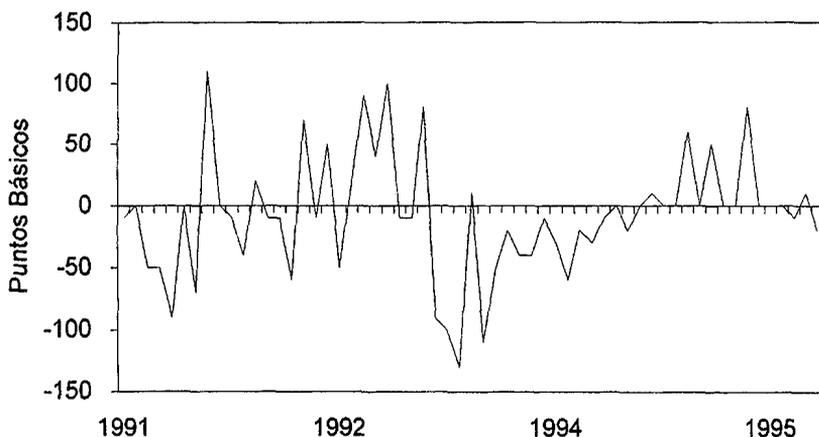
$$P(dt, dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left[-\frac{\left(dr - \frac{1}{\sigma\sqrt{r}} - \frac{k(\mu-r)dt}{\sigma\sqrt{r}} \right)^2}{2dt} \right]$$

⁸Para Serrat (1990), esta es la serie que mejor aproxima un tipo teórico sin riesgo de crédito. Generalmente la *proxy* utilizada en la literatura es el rendimiento de los *Treasury Bills* con vencimiento un mes (Ananthanarayanan (1980), Chan, Karolyi, Longstaff y Sanders (1992), y Broze, Scaillet y Zakoian (1993)).

GRÁFICO 1
TIPO DE INTERÉS A UN DÍA



PRIMERA DIFERENCIA DEL TIPO DE INTERÉS



comprendido entre enero de 1989 y diciembre de 1995. En el Gráfico 1 se observa que dicha serie presenta un cambio de tendencia a partir de abril de 1993. Asimismo, el gráfico de su primera diferencia indica la presencia de heterocedasticidad. Los estadísticos descriptivos del tipo de interés a un día y su primera diferencia recogidos en el Cuadro 1 ratifican dicha evidencia. Así, puede observarse un cambio sustancial en la media del tipo de interés y en su desviación estándar entre los dos subperíodos en que se divide la muestra. Respecto a los coeficientes de autocorrelación, los de los tipos de interés en niveles son elevados y caen lentamente mientras que los de sus primeras diferencias son pequeños y no presentan ningún comportamiento. A su vez, el test de raíces unitarias de Dickey-Fuller permite rechazar la hipótesis de que las series sean $I(2)$ frente a la alternativa de ser $I(1)$, pero no se

CUADRO 1
Tipos de interés a un día. Estadísticos descriptivos

	1989.01-1995.12		1989.01-1993.03		1993.04-1995.12	
	i	dt	i	dt	i	dr
Media	0,1145	-0,0002	0,1301	0,0007	0,0905	-0,0017
Desviación	0,0234	0,0048	0,0103	0,0049	0,0161	0,0044
Mínimo	0,0730	-0,0130	0,1110	-0,0120	0,0730	-0,0130
Máximo	0,1480	0,0110	0,1480	0,0110	0,1390	0,0080
Asimetría	-0,4381	-0,1215	-0,2374	-0,0253	1,2775	-0,5436
Kurtosis	1,7805	3,3992	1,6247	2,9667	4,3042	3,7306
Bera-Jarque	7,892	0,7556	4,4980	0,0076	11,3152	2,3592
r(1)	0,973	0,097	0,834	-0,064	0,820	0,389
r(2)	0,942	0,284	0,734	0,200	0,670	0,484
r(3)	0,899	0,115	0,578	-0,020	0,564	0,455
r(4)	0,850	0,169	0,442	0,112	0,411	0,326
r(5)	0,795	0,063	0,320	0,101	0,303	0,305
r(6)	0,737	-0,082	0,209	-0,030	0,202	0,235
Dickey-Fuller	-2,023	-7,953	-1,142	-6,925	-3,408	-7,702

Nota. El tipo de interés a un día es el de las operaciones compraventa con pacto de recompra con letras del Tesoro dr es la primera diferencia del tipo de interés a un día. Valor crítico del DF en cada período es -3,764, -3,504 y -3,551, respectivamente.

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del Boletín estadístico del Banco de España.

puede rechazar que sean $I(1)$ frente a la alternativa de ser $I(0)$. Esta evidencia indica que las series de tipos de interés en niveles parecen no ser estacionarias pero sí sus primeras diferencias. Por último, comentar que atendiendo a los estadísticos de kurtosis, asimetría y Bera-Jarque, parece que las primeras diferencias de los tipos de interés se distribuyen como una normal.

Resultados de estimación

El Cuadro 2 recoge el valor de los parámetros estimados, los estadísticos t (entre paréntesis) y el logaritmo de la función de verosimilitud para la totalidad del período muestral, y para dos subperíodos que abarcan desde 01.1989-03.1993 y desde 04.1993 hasta 12.1995, respectivamente, atendiendo al cambio observado en la serie. Para el conjunto de la muestra el proceso estimado se ajusta bien a los datos pero los parámetros no son significativos, lo que probablemente se deba a la inestabilidad generada por el cambio estructural. Al estimar el modelo en las dos submuestras, se obtiene que dichos parámetros pasan a ser significativos, con algunos cambios significativos de valor. Con el fin de comprobar en qué parámetros se ha producido cambio estructural se propone la siguiente especificación⁹:

$$\begin{aligned} r_{t+1} - r_t &= (k + Dk_1)[(\mu + D\mu_1) - r_t] + \varepsilon_{t+1} & [8] \\ E[\varepsilon_{t+1}] &= 0 \\ E[\varepsilon_{t+1}^2] &= (\sigma^2 + D\sigma_1)r_t^\omega \end{aligned}$$

donde D es una variable ficticia 0-1 que toma valor 1 desde 01.1989 hasta 03.1993, y donde los parámetros k_1 , μ_1 y σ_1 son los asociados a la variable ficticia.

CUADRO 2
Estimación de la dinámica del tipo de interés a un día

	1989.01-1995.12	1989 01-1995 12	1989.01-1995 12
K	0,0135 (0,504)	0,1138 (1,682)	0,1623 (4,748)
μ	0,0943 (1,644)	0,1357 (16,021)	0,0816 (18,839)
δ	0,0139 (12,811)	0,0132 (9,252)	0,0101 (8,016)
Logaritmo verosimilitud	404,325	242,453	174,726

Nota Los valores entre paréntesis son los estadísticos t-Student

⁹De igual forma procede Chan, Karolyi, Longstaff y Sanders (1992).

Los resultados de la estimación de esta especificación aparecen recogidos en el Cuadro 3, en el que se puede observar, atendiendo al contraste razón de verosimilitud¹⁰, que los parámetros asociados a la variable ficticia son significativos conjuntamente, constatándose por tanto, la existencia de cambio estructural. Por otro lado, analizando la significatividad individual de cada uno de los parámetros asociados a la variable ficticia D se puede concluir que se ha producido un cambio en la volatilidad del tipo de interés y en el nivel del tipo de interés a largo plazo.

CUADRO 3
Estimación del proceso dinámico del tipo de interés a un día Cambio estructural

K	K1	μ	μ	δ	$\delta 1$	Logaritmo verosimil	RV
0,1622 (4,751)	-0,0484 (-0,639)	0,0816 (18,830)	0,0541 (5,688)	0,0101 (8,026)	0,0031 (1,639)	417,179	25,71

Nota Los valores entre parentesis son los estadísticos t-Student
RV es el contraste razón de verosimilitud y su valor crítico es 7.815

En cuanto al precio de mercado del riesgo, es decir, al parámetro λ , éste puede estimarse a partir de (2) por métodos no lineales. Sin embargo, dado que λ es el único parámetro a estimar, su estimación variara en función de la serie escogida como variable dependiente (ver Cuadro 4), lo cual es contradictorio con el modelo de CIR, donde λ es un parámetro que no depende del precio del activo.

CUADRO 4
Estimación del precio del riesgo

	Método no lineal				Método
	MIBOR 3 MESES	MIBOR 6 MESES	MIBOR 1 AÑO	LETRAS 1 AÑO	SURE
LANDA	-0,6654 (13,508)	-0,38337 (-11,524)	-0,2582 (-9,877)	-0,0619 (-2,265)	-0,1870 (-9,337)
Logaritmo Verosimilitud	306,990	292,629	273,866	278,356	335,039

En este sentido cabe recordar que la ETTI es una forma funcional cambiante en el tiempo, de forma que no sólo el nivel sino su pendiente

¹⁰ El contraste razón de verosimilitud (RV) se distribuye asintóticamente como una χ^2 con r grados de libertad, siendo r el número de restricciones que implica la hipótesis nula, que en este caso concreto es $H_0 : k_1 = \mu 1 = \sigma 1 = 0$. Así pues, éste es un contraste de igualdad de coeficientes, no condicionado a que las varianzas sean iguales.

varia. La ETTI de un período puede estar por debajo o por encima de la del período anterior, reflejando subidas o caídas generalizadas de los tipos de interés y, asimismo, puede presentar una pendiente mayor o menor a la del período anterior, reflejando cambios en el diferencial de los tipos de interés a corto y largo plazo. El considerar que los parámetros del proceso estocástico del tipo de interés a corto plazo permanecen constantes a lo largo de un período hace que toda la variación que sufre la ETTI recaiga en el único parámetro a estimar, λ , el cual reflejará no sólo el precio de mercado del riesgo sino las variaciones en la pendiente de la ETTI e incluso las características propias del mercado considerado. Si a lo largo del tiempo la ETTI sólo presentara movimientos paralelos al alza o a la baja, la estimación de λ sería independiente del tipo de interés escogido¹¹.

Otra posibilidad para estimar λ es plantear un sistema de ecuaciones no lineales aparentemente no relacionadas cuyo tratamiento adecuado es el método SURE no lineal multivariante de Zellner. Con este método de estimación se obtiene una única estimación del precio de mercado del riesgo, y los residuos de cada una de las series recogen lo que el modelo no puede explicar como son las características propias de cada mercado y plazo. La estimación del parámetro λ por el método SURE aparece recogida en el Cuadro 4 y, como puede observarse, es negativo y significativo, lo cual indica que a lo largo del período considerado ha existido una prima positiva. La obtención de esta prima positiva y significativa implica que se rechaza la teoría de las expectativas, e indica que los inversores tienen preferencia por el corto plazo. Además de esta limitación en la estimación de λ , hay que tener en cuenta que este método de estimación supone que los parámetros k , μ y σ son constantes a lo largo del período muestral, lo que significaría que la ETTI implícita en el precio de los títulos públicos tiene la misma forma funcional a lo largo de todo el período. En la medida en que la ETTI sea una forma funcional cambiante, lo que se obtendría por este método podría considerarse como la ETTI media del período. Si se quiere obtener para cada momento del tiempo la ETTI correspondiente, ha de estimarse los parámetros que en ese momento configuran la ETTI implícita en los precios de la deuda pública a través de la estimación de corte transversal. Este es el método que se sigue a continuación.

¹¹ Aún así, podrían existir diferencias que podrían atribuirse a posibles diferencias en la negociación de los mercados.

3.2 Estimación de los parámetros de modelo de CIR con datos de corte transversal

El objetivo de este apartado es obtener la estimación de los parámetros ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y del tipo de interés instantáneo del modelo de CIR, con datos de corte transversal, durante el período enero de 1991 y diciembre de 1995, aplicando mínimos cuadrados no lineales a la expresión [6], tal y como hacen Brown y Dyvbig (1986). En la práctica, la estimación de dichos parámetros ha presentado problemas de identificación, lo que indica que la forma funcional del modelo de CIR está sobreparametrizada. Ante la dificultad de estimar los parámetros se ha procedido, tal y como propone Serrat, a imponer el valor del parámetro ϕ_3 en [6]. El valor del parámetro $\phi_3 = 2k\mu/\sigma^2$ se obtiene de la estimación de k, μ y σ del proceso estocástico del tipo instantáneo realizado en el apartado anterior¹². Una vez impuesto el valor de ϕ_3 en [6] se procede a aplicar mínimos cuadrados no lineales para obtener ϕ_1, ϕ_2 , y el tipo de interés instantáneo r ¹³. En la literatura empírica, generalmente se supone que la varianza de los residuos es proporcional al producto del precio de los bonos y su duración, viniendo dada por la siguiente expresión:

$$E(\varepsilon_k^2) = \sigma^2 w_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad [9]$$

donde $W_k = \left(\frac{dP_k}{dy_k}\right) = (D_k P_k)^2$, siendo D_k la duración de Macaulay del k -ésimo título e y_k la tasa de rentabilidad interna del k -ésimo título. Sin embargo, no se ha considerado oportuno corregir directamente por heterocedasticidad los residuos sin antes comprobar la existencia de la misma. Por esta razón, en cada período se ha estimado el modelo sin suponer un comportamiento de la varianza de las perturbaciones distinto al de ruido blanco y, posteriormente, se ha comprobado si la varianza de los residuos presentaba heterocedasticidad. En aquellos casos en los que se ha detectado la presencia de heterocedasticidad en los residuos se ha corregido. Por otro lado se ha procedido a eliminar los *outliers* que han surgido en la estimación siguiendo el siguiente

¹² Dado que en la estimación de este proceso estocástico se observa un cambio estructural en los parámetros σ y μ , se obtiene un valor de ϕ_3 para cada uno de los subperíodos en que se divide la muestra. El valor de ϕ_3 es 233,46 para el período comprendido entre enero de 1991 y marzo de 1993 y de 242,95 para el período que abarca desde abril de 1993 hasta diciembre de 1995. Nótese que se trata del valor medio estimado que el parámetro ϕ_3 tomaría en el período considerado.

¹³ La diferencia con Serrat es que mientras él obtiene la estimación temporal de los parámetros restantes, aquí se utiliza un parámetro obtenido con datos temporales en una estimación de corte transversal

proceso iterativo. si alguna observación presenta un residuo mayor en valor absoluto a un número de veces la desviación estándar de los residuos, se le aplica un test de valores atípicos basado en los residuos estudentizados¹⁴, y si se constata que es un valor atípico, la observación es eliminada de la muestra y se procede a estimar de nuevo. En los trabajos empíricos, generalmente se consideran *ouliers* las observaciones con un residuo superior a 2,5 veces la desviación estándar, sin embargo, nuestro criterio ha sido más estricto en el corto plazo y se ha fijado en 2 veces la desviación estándar y en 2,5 veces para el largo plazo. La razón es que se minimizan los errores en precios, y un error pequeño en precio en términos de rendimiento puede ser muy elevado, fundamentalmente en el corto plazo.

Datos

La Central de Anotaciones proporciona diariamente los precios medios de las operaciones compraventa simple al contado del mercado de deuda pública anotada. El período de estimación considerado abarca desde enero de 1991 a diciembre de 1995 estimándose el modelo de CIR el último día hábil del mes. Se han tomado los precios de los bonos y obligaciones del Estado y letras del Tesoro con un saldo negociado superior a 500 millones de pesetas o, en caso de no alcanzar ese volumen, con un número de operaciones mayor que uno. De esta forma, se evita considerar títulos negociados por volúmenes reducidos o emisiones antiguas, que presentan problemas de liquidez. Para los plazos inferiores a un año, los instrumentos idóneos son las letras del Tesoro. Sin embargo, como su mercado secundario es poco activo en el muy corto plazo, para los plazos inferiores a los tres meses se han utilizado datos procedentes de las operaciones simultáneas, que son equivalentes a instrumentos emitidos a descuento con una vida igual al plazo de la simultánea.

Resultado de la estimación

Los resultados de la estimación del modelo de CIR, para el período enero de 1991-diciembre de 1995, siguiendo el criterio de minimización

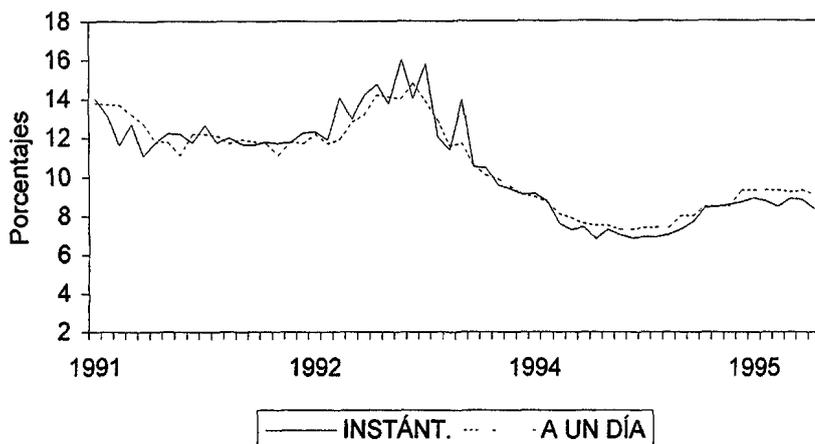
¹⁴ Los residuos estudentizados, t_i , se obtienen al dividir cada residuo por la estimación de su desviación típica en la que no ha intervenido la observación i . De esta forma, numerador y denominador son independientes y los residuos estudentizados se distribuyen como una t con $T - k - 2$ grados de libertad. Se considera atípica una observación si su residuo estudentizado es mayor que el valor de $t\alpha_{T-k-2}$ (ver Peña (1987)), siendo T el número de observaciones, k el número de parámetros del modelo y α el nivel de significación.

CUADRO 5
Resumen de los resultados de las estimaciones mensuales de la ETTI

	1991.01-1995.12			1989.01-1993.03			1993.04-1995.12					
	Desviación			Desviación			Desviación					
	Media	Típica	Máximo	Mínimo	Media	Típica	Máximo	Mínimo	Media	Típica	Máximo	
ϕ_1	1,7878	1,7477	7,4033	0,5624	1,3251	1,2948	4,2990	0,5624	2,1657	1,9854	7,4033	0,1026
ϕ_2	1,7871	1,7476	7,4029	0,5595	1,3246	1,2947	4,2986	0,5595	2,1655	1,9852	7,4029	0,1021
ϕ_3 =Tipo de interés	0,1074	0,0255	0,1601	0,0680	0,1266	0,0120	0,1601	0,1106	0,0887	0,0204	0,1579	0,0680
δ	0,0347	0,0176	0,0770	0,0056	0,0311	0,0183	0,0629	0,0056	0,0376	0,0168	0,0770	0,0101
Desviación tipo de interés	0,0113	0,0064	0,0274	0,0020	0,0111	0,0067	0,0234	0,0020	0,0115	0,0063	0,0274	0,0030
Tipo de interés a largo plazo	0,0104	0,0161	0,1331	0,0663	0,1060	0,0165	0,1331	0,0663	0,1017	0,0157	0,1215	0,0705
S.E	0,0020	0,0023	0,0132	0,0000	0,0021	0,0024	0,0132	0,0000	0,0019	0,0022	0,00114	0,0006
S.R.Q.	0,0001	0,0003	0,0017	0,0000	0,0001	0,0003	0,0017	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0000

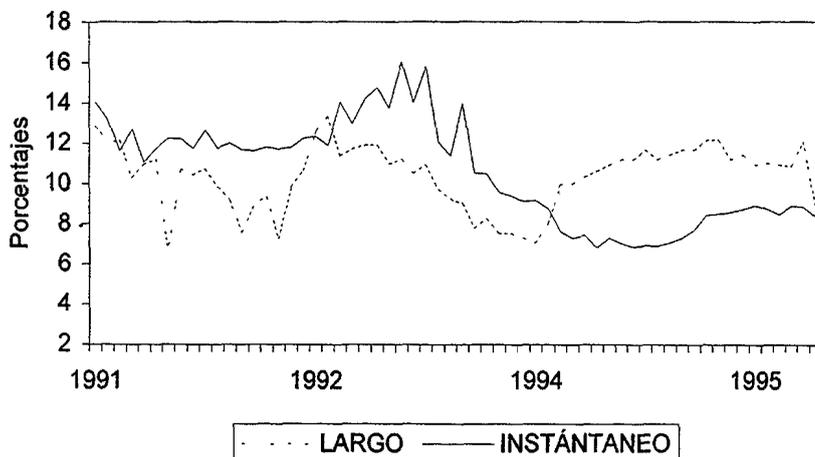
de los errores en precio al cuadrado, aparecen recogidos en el Cuadro 5, en el que se ha considerado también los dos subperíodos en que se ha dividido la muestra. Como puede observarse se produce un cambio significativo en el nivel del tipo de interés instantáneo entre el primer y segundo subperíodo de conformidad con lo observado con los tipos de interés efectivos.

GRÁFICO 2
TIPO DE INTERÉS INSTANTÁNEO Y A UN DÍA*



* Tipo de interés de las operaciones compraventa con pacto de recompra con letras del tesoro

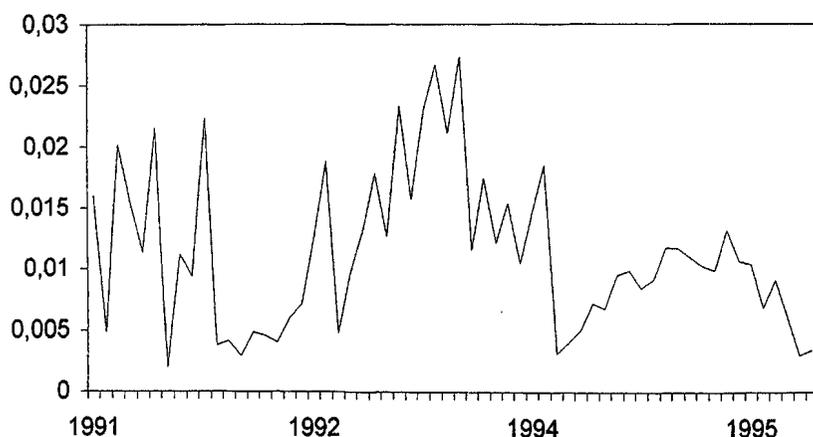
TIPO DE INTERÉS A LARGO PLAZO E INSTANTÁNEO



El Gráfico 2 recoge la evolución del tipo de interés instantáneo estimado y el tipo de interés a un día utilizado como *proxy* del tipo instantáneo. Como puede observarse, ambas series siguen una evolución similar. Dicho gráfico recoge también el tipo de interés a largo

plazo, que como se observa estuvo situado por debajo del instantáneo hasta marzo de 1994, lo que indica que la ETTI presentó pendiente negativa (“curva invertida”), mientras que a partir de abril de se situó por encima del instantáneo, con lo que la pendiente de la ETTI presentó pendiente positiva. Estos resultados son acordes con la evidencia empírica observada en el período. Asimismo, la variabilidad del tipo de interés instantáneo (Gráfico 2) fue mayor en los períodos en que se produjeron turbulencias en los mercados financieros internacionales, como ocurrió en el segundo semestre de 1992 tras el resultado del referéndum danés sobre el Tratado de Maastricht, y el primer semestre de 1993 en el que los mercados financieros y cambiarios fueron objeto de importantes ataques especulativos.

GRÁFICO 3
VARIABILIDAD ÍMPLICITA DEL TIPO DE INTERÉS



Respecto a la bondad del ajuste del modelo de CIR, se han comparado los resultados obtenidos con los por Nuñez (1995), quien realiza la estimación diaria de la ETTI con los métodos de McCulloch, Nelson y Siegel y Svensson. Entre el 3 de enero y el 23 de mayo de 1995, los resultados de sus estimaciones son las siguientes: la suma de errores al cuadrado media es igual a 0,6 tanto con el procedimiento de Nelson y Siegel como con el de Svensson y de 0,5 con el de McCulloch; los valores máximos de la suma de errores al cuadrado son 2,2, 3,3 y 1,7 en los procedimientos de Nelson y Siegel, Svensson y McCulloch, respectivamente; y los valores mínimos obtenidos para la suma de errores al cuadrado es 0,2 en todos los casos. Aunque el período temporal no coincida, la comparación de sus resultados con los del Cuadro 5 permite concluir que el ajuste del modelo CIR a los precios de los

títulos es más que aceptable¹⁵. Por otro lado, los gráficos que recogen los precios observados y estimados por el modelo CIR para el primer y último mes de 1995 también indican que el modelo ajusta bien el precio de los títulos (Gráfico 3). Si se recuerda que las observaciones están ordenadas secuencialmente de menor a mayor vencimiento, se observa que el modelo ajusta peor en el tramo largo de la curva, que corresponde a las observaciones de títulos de mayor vencimiento. El modelo sobrestima el precio de los títulos de mayor vencimiento y pueden apuntarse tanto factores externos como internos al modelo para explicarlo. Bliss (1996) y Ezquiaga et al. (1994) consideran que el peor ajuste en el largo plazo de la ETTI se debe a factores omitidos, y en particular, a que el modelo de CIR no hace referencia a diferencias impositivas entre los activos. La ETTI estimada, al considerar los flujos brutos, es el resultado de las condiciones fiscales medias relevantes en el mercado en el que coexisten distintas situaciones fiscales. De esta forma, los residuos recogen la presencia de costes de transacción, imposición fiscal y otras imperfecciones del mercado. Por tanto, como en los títulos a largo plazo la distorsión fiscal es mayor, *ceteris paribus*, que en los títulos a corto plazo, los residuos asociados a ellos también serán mayores¹⁶. No obstante, y siguiendo a Bliss, el peor ajuste en el largo plazo puede también estar ocasionado por factores intrínsecos al modelo que, en el caso concreto de CIR, se debería al hecho de que supone implícitamente que la prima al riesgo es una función monótona creciente del vencimiento, cuando en realidad la prima al riesgo, y por tanto la ETTI, puede presentar formas más complejas. Esta debilidad teórica del modelo podría explicar el peor ajuste en el largo plazo y es la causa de la aparición de modelos multifactoriales que permiten formas funcionales de la ETTI más realistas.

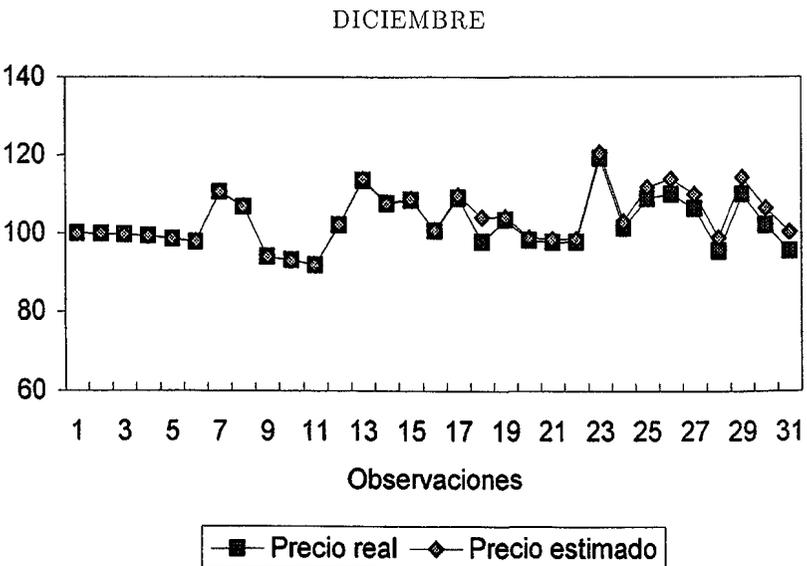
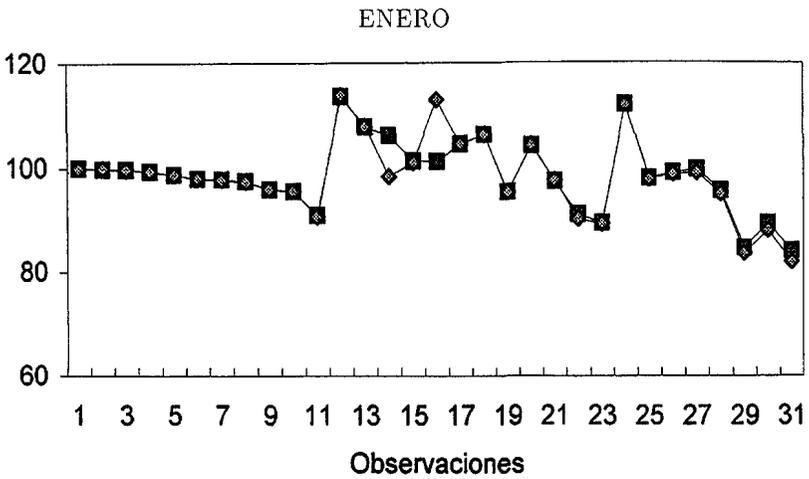
Así pues, la evidencia empírica obtenida lleva a concluir que el modelo de equilibrio de CIR se ajusta bien a los datos y, por tanto, es adecuado para explicar la formación de precios en el mercado español de deuda pública y para obtener la ETTI, a pesar del peor ajuste en el largo plazo. No obstante, el problema de identificación de los parámetros y su complejidad respecto al cálculo, lo hace poco atractivo frente a otros modelos más sencillos de estimar y que presentan también un grado

¹⁵ Observar que para comparar estos valores con los del Cuadro 5 hay que dividirlos por 10 000, ya que la estimación de Nuñez toma los precios de los títulos en tanto por cien

¹⁶ Queda abierta, por tanto, la posibilidad de tener en cuenta los efectos impositivos con el fin de obtener una ETTI ajustada por los efectos fiscales

de ajuste elevado. Esta es la razón por la que los bancos centrales de Inglaterra y España obtienen la ETTI a través de modelos de la corriente inductiva, que permiten obtener, diariamente y de forma más sencilla y rápida, la ETTI para ser utilizada como indicador en la política monetaria.

GRÁFICO 4
 PRECIOS OBSERVADOS Y ESTIMADOS AÑO 1995



4. Conclusiones

La estimación del proceso continuo del tipo de interés instantáneo mediante una aproximación discreta de su ecuación diferencial estocástica, en la que se utiliza como *proxy* del tipo de interés instantáneo sin riesgo la serie histórica de un tipo de interés a corto plazo, ha permitido llegar a las siguientes conclusiones:

1. Durante el período 1989-1995 se produce un cambio estructural en la dinámica del tipo de interés a corto plazo que afecta a su valor de largo plazo y a su volatilidad.
2. La estimación del precio de mercado del riesgo por el método SURE produce un coeficiente negativo y significativo, lo que evidencia que a lo largo del período considerado ha existido una prima positiva, en contra de la hipótesis de las expectativas puras y a favor de una preferencia de los inversores por el corto plazo.

Con respecto a la estimación del modelo de CIR con datos de corte transversal, las conclusiones que se pueden derivar son:

3. El modelo de equilibrio de CIR se ajusta bien a los datos, y por tanto dicha modelización es adecuada para explicar la formación de precios en el mercado español de deuda. Las razones sobre las que se basa la anterior afirmación son:
 - a) Comparando la suma de los residuos al cuadrado media con la obtenida por Nuñez (1995) a través de tres modelos de la corriente inductiva se puede concluir que el ajuste del modelo de CIR es bueno.
 - b) Los gráficos de los valores observados y estimados evidencian que se ajusta bien a los datos de la variable dependiente, aunque ajusta peor en los títulos de mayor vencimiento.
 - c) La estimación de corte transversal ha permitido estimar el tipo de interés instantáneo, observándose un cambio significativo que puede fecharse en abril de 1993 en conformidad con lo observado con los tipos de interés efectivos.
 - d) El tipo de interés a largo plazo estimado ha estado situado hasta marzo de 1994 por debajo del tipo de interés instantáneo, indicando que la ETTI presenta pendiente negativa (curva invertida), mientras que a partir de abril de 1994 el tipo a largo plazo se sitúa por encima del instantáneo, con lo que la pendiente de la ETTI presenta pendiente positiva. Estos resultados son acordes con la evidencia empírica.

e) La variabilidad estimada del tipo de interés instantáneo es mayor en los períodos en que se ha producido turbulencias en los mercados financieros internacionales, como ocurrió en el segundo semestre de 1992, tras el referéndum danés sobre el Tratado de Maastrich, y el primer semestre de 1993, en el que los mercados financieros y cambiarios internacionales fueron objeto de importantes ataques especulativos.

4. La estimación del modelo CIR es muy no lineal, los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 están altamente correlacionados, y su estimación ha presentado problemas de identificación, lo que sugiere que la forma funcional está sobreparametrizada. Ello ha obligado a tener que fijar el valor del parámetro ϕ_3 para poder estimar los otros dos. Por tanto, la ETTI española no es lo suficientemente complicada para aprovechar la flexibilidad de la forma funcional del modelo de CIR en el período considerado. Sin embargo, dicha flexibilidad podría ser necesaria para explicar la ETTI en otros períodos y en otros países.

5. El cálculo del modelo es complejo, lo cual le resta atractivo frente a otros modelos más sencillos de estimar y que presentan también un elevado grado de ajuste.

Abstract

A one-factor version of the Cox, Ingersoll and Ross model is used in this paper to analyse price formation in the Spanish public debt market and to estimate the term structure of interest rates, over the period January 1991 - December 1995. The results obtained indicate that the model captures successfully the pattern of public debt prices. However, the model appears to fit long-term bonds prices worse than short-term bonds prices and the estimation presented parameter identification problems, which make the model less attractive than other more parsimonious methods.

Keywords: Term structure of interest rates, dynamics of the interest rate, stochastic process, one factor model.

Recepción del original, julio de 1997

Versión final, diciembre de 1998